Teoría Algebraica de Números -Segunda entrega

2do. Cuatrimestre 2020

(1) Sean L, K extensiones finitas de $\mathbb{Q}$ (no necesariamente Galoisianas). Probar las siguientes afirmaciones:
   (a) Si p es no ramificado en L ni en K entonces es no ramificado en LK.
   (b) Deducir que si p es no ramificado en L, entonces tampoco lo es en su clausura Galois.

(2) Probar con un argumento similar al de la teórica que

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ -1 & \text{si } p \equiv \pm 3 \pmod 8 \end{cases}$$

(3) Sea L/K una extensión de cuerpos de números de grado n. Definimos el *discriminante relativo* de L/K como el ideal

$$\mathcal{D}(L/K) = \langle \mathcal{D}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \ : \ \alpha_i \in \mathcal{O}_L \rangle_{\mathcal{O}_K}.$$

   (a) Probar que $\mathcal{D}(L/K)$ es un ideal no nulo de $\mathcal{O}_K$.
   (b) Probar que si $K = \mathbb{Q}$ entonces el discriminante relativo de $L/\mathbb{Q}$ es el ideal de $\mathbb{Z}$ generado por $\mathcal{D}(L/\mathbb{Q})$.
   (c) Probar que $\mathfrak{p}$ ramifica en L/K si y sólo si $\mathfrak{p} \mid \mathcal{D}(L/K)$.

(4) Probar que el cuerpo $\mathbb{Q}[\sqrt{-6}]$ tiene grupo de clases isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, y que el cuerpo $\mathbb{Q}[\sqrt{-6}, \sqrt{2}]$ es un DIP.

(5) Veamos una aplicación del Teorema de Minkowski para demostrar el Teorema de Lagrange: todo número natural es suma de 4 cuadrados.
   (a) Probar que si n y m son suma de cuatro cuadrados, entonces lo es nm. Luego basta probar que todo primo positivo es suma de cuatro cuadrados.
   (b) Sea p un primo impar. Probar que existen enteros r, s tales que $r^2 + s^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$.
   (c) Consideremos el retículo

$$L = \langle (p,0,0,0), (0,p,0,0), (r,s,1,0), (s,-r,0,1) \rangle.$$

   Verificar que si $\mathbf{v} \in L$ entonces $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 \equiv 0 \pmod p$.
   (d) Tomemos $B = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \sum_{i=1}^4 x_i^2 < 2p \right\}$ la bola de radio $\sqrt{2p}$. Probar que B satisface las condiciones del Teorema de Minkowski con lo existe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{v} \in L \cap B$. Probar que $\mathbf{v}$ sirve.