Teoría Algebraica de Números - Práctica 1

2do. Cuatrimestre 2020

Cuerpos, anillos y extensiones

La letra K siempre denotará un cuerpo cualquiera y la letra R un anillo.

(1) Probar que todo ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbb{Z}$ es principal, o sea existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathfrak{a} = (a) = a\mathbb{Z}$ (el conjunto de múltiplos de a).

(2) Si $\mathfrak{a} \subset R$ es un anillo, podemos definir una relación de equivalencia en R decretando que $a \sim b$ si y sólo si $a - b \in \mathfrak{a}$.
   (a) Probar que la relación anterior es una relación de equivalencia.
   (b) Probar que el conjunto $R/\mathfrak{a}$ de clases de equivalencia hereda las operaciones de R, o sea que las operaciones en clases $\bar{a} + \bar{b} = a \bar{+} b$ y $\bar{a} \cdot \bar{b} = a \bar{\cdot} b$ están bien definidas.
   (c) Probar que $R/\mathfrak{a}$ es un anillo.

(3) Recordar que in ideal $\mathfrak{a} \subset R$ se dice primo si cumple que $a \cdot b \in \mathfrak{a}$ implica que $a \in \mathfrak{a}$ o $b \in \mathfrak{a}$.
   (a) Probar que $\mathfrak{a} \subset \mathbb{Z}$ es primo si y sólo si $\mathfrak{a} = \{0\}$ o está generado por un número primo.
   (b) Probar que si $f : \mathbb{Z} \to K$ es el morfismo natural de anillos, entonces su núcleo es un ideal primo.
   (c) Probar que un ideal $\mathfrak{a} \subset R$ es primo si y sólo si $R/\mathfrak{a}$ es un *dominio íntegro*, esto es que si el producto de dos elementos del anillo es cero es porque alguno de ellos lo es.

(4) Sean K, L cuerpos. Recordar que si $K \subset L$ entonces L tiene una estructura de K-espacio vectorial, y denotamos por $[L : K]$ a la dimensión de L como K-espacio vectorial. Probar que si $K \subset L \subset M$ son cuerpos, y $[M : K]$ es finita, entonces $[M : K] = [M : L] \cdot [L : K]$.

(5) Sea K un cuerpo de grado 2 sobre $\mathbb{Q}$. Probar que $K = \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ para algún m libre de cuadrados.

(6) Probar que si $p(x) \in K[x]$ es un polinomio irreducible entonces $L := K[x]/(p(x))$ (el ideal generado por $p(x)$) es un cuerpo, y que $[L : K] = \deg(p(x))$.

(7) Sea L un cuerpo que contiene a K, y sea $\alpha \in L$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (a) α es algebraico sobre K (o sea existe un polinomio no nulo con coeficientes en K que lo tiene como raíz),
   (b) El anillo $K[\alpha]$ tiene dimensión finita como K-espacio vectorial.
   (c) El anillo $K[\alpha]$ es un cuerpo.

(8) Sea $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$. Hallar un polinomio que tenga a $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 1$ como raíz.

(9) Sea $K = \mathbb{Q}[\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}]$. Hallar un α tal que $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ y hallar el polinomio minimal de α sobre $\mathbb{Q}$.