3-variedades hiperbólicas aritméticas: 3
¿Se puede oír la forma de un tambor aritmético?

Benjamin Linowitz

Oberlin College

Sea M una variedad riemanniana compacta.

El **espectro de autovalores de Laplace** $\mathcal{E}(M)$ de M es el multiconjunto de autovalores del operador de Laplace-Beltrami actuando sobre $L^2(M)$.

$\mathcal{E}(M)$ es un conjunto discreto de números no-negativos que tiende a infinito.

La geometría espectral inversa pregunta en qué medida el espectro de M determina su topología y geometría.

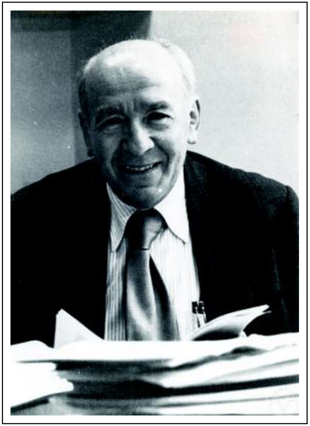
Teorema (Weyl, 1911)

El espectro de M determina su volumen. Más precisamente,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\#\{\lambda : \lambda < x\}}{x} = \frac{Vol(M)}{2\pi}.$$

En 1960, Leon Green preguntó si el espectro de M determina su clase de isometría.

El espectro de M es el conjunto de frecuencias producido por un tambor cuya membrana tiene la forma de M.



Mark Kac (1966) popularizó esta pregunta para los dominios en el plano:

¿Se puede oír la forma de un tambor?

Milnor ya había demostrado que la clase de isometría no es en general una invariante espectral.

Teorema (Milnor, 1964)

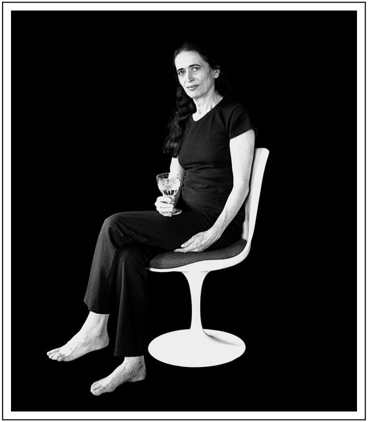
Existen lattices $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^{16}$ tales que los toros $\mathbb{R}^{16}/\Gamma_1$ y $\mathbb{R}^{16}/\Gamma_2$ son isospectrales pero no isométricos.

La pregunta de Kac finalmente fue respondida en 1992.

Teorema (Gordon, Webb, Wolpert, 1992)

No es posible oír la forma de un tambor.

Sin embargo, 12 años antes, Vignéras sorprendió al mundo al construir superficies y 3-variedades hiperbólicas isospectrales.



Teorema (Vignéras, 1980)

Existen superficies (y 3-variedades) hiperbólicas que son isospectrales pero no isométricas.

En realidad, Vignéras construyó variedades isospectrales de dimensión n por cada $n \geq 2$.

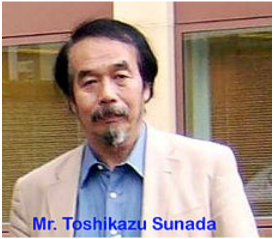
Prácticamente todos los ejemplos de variedades isospectrales se basan en un método general debido a Sunada.

Sea G un grupo finito y H_1, H_2 subgrupos de G.

H_1 y H_2 son **casi conjugados** en G si, para todo $g \in G$

$$\#([g] \cap H_1) = \#([g] \cap H_2)$$

donde $[g] =$ clase de conjugación de g.



Teorema (Sunada, 1985)

Si M es una variedad compacta, G actúa libremente e isométricamente en M y H_1, H_2 son subgrupos casi conjugados de G, entonces $H_1 \backslash M$ y $H_2 \backslash M$ son isospectrales.

Los ejemplos de Vignéras se destacan porque no se pueden construir usando el método de Sunada.

Generalidades sobre isospectralidad

Sea G un grupo de Lie semisimple y Γ un subgrupo discreto y cocompacto de G.

Denotamos por $L^2(\Gamma\backslash G)$ el espacio de funciones de cuadrado integrable sobre $\Gamma\backslash G$ con respecto a la medida de Haar inducida de G y por $C_c(G)$ el espacio de funciones a valores complejos con soporte compacto e infinitamente diferenciables sobre G.

Definimos un operador unitario R_Γ de G en $L^2(\Gamma\backslash G)$ por

$$(R_\Gamma(g)f)(x) = f(xg)$$

donde $f \in L^2(\Gamma\backslash G), x \in \Gamma\backslash G$, y $g \in G$.

Si Γ' es otro subgrupo discreto y cocompacto de G decimos que Γ y Γ' son **equivalentes en representaciones** si existe un isomorfismo unitario $T : L^2(\Gamma\backslash G) \to L^2(\Gamma'\backslash G)$ tal que

$$T(R_\Gamma(g)f) = R_{\Gamma'}(g)T(f)$$

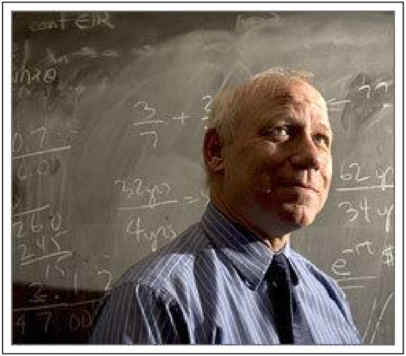
para todo $g \in G$ y $f \in L^2(\Gamma\backslash G)$.

Es un hecho bien conocido que la equivalencia en representaciones implica isospectralidad con respecto al espectro de Laplace.

De hecho, la equivalencia en representaciones implica **isospectralidad fuerte** (e.g., el mismo espectro de autovalores con respecto a cualquier operador diferencial elíptico autoadjunto natural, por ejemplo el Laplaciano actuando sobre p-formas).

Teorema (DeTurck y Gordon)

Sea G un grupo de Lie que actúa sobre una variedad Riemanniana M por isometrías. Supongamos que $\Gamma, \Gamma' \leq G$ actúan propia y discontinuamente sobre M. Si Γ y Γ' son equivalentes en representaciones entonces $\Gamma \backslash M$ y $\Gamma' \backslash M$ son fuertemente isospectrales.



La gran mayoría de los ejemplos conocidos de variedades isospectrales son en realidad fuertemente isospectrales.

Teorema (Lauret, Miatello, Rossetti)

Existen variedades que son isospectrales pero no fuertemente isospectrales.

Sea $\phi \in C_c(G)$ y definimos el operador $R_\Gamma(\phi)$ en $L^2(\Gamma\backslash G)$ por

$$(R_\Gamma(\phi)f)(x) = \int_G \phi(g)f(xg)dg.$$

Este operador satisface la Fórmula de la Traza de Selberg:

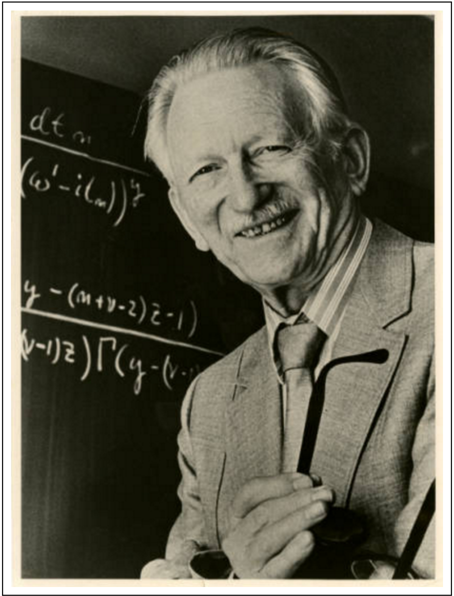
Teorema (Fórmula de la Traza de Selberg)

Tenemos

$$\operatorname{tr} R_\Gamma(\phi) = \sum_{[\gamma]\in A_\Gamma} \int_{C(\gamma,\Gamma)\backslash G} \phi(g^{-1}\gamma g)dg,$$

donde A_Γ denota el conjunto de clases de conjugación de elementos en Γ y $C(\gamma,\Gamma)$ es el centralizador en Γ de γ.

Es bien conocido que R_Γ está determinado por su traza.



Atle Selberg

Definimos el **peso** de una clase de conjugación $[\gamma]$ en Γ, por una medida sobre $C(\gamma, \Gamma)$, como el volumen $\mathrm{vol}(C(\gamma, \Gamma) \backslash C(\gamma, G))$. Uno entonces deduce lo siguiente de la Fórmula de la Traza de Selberg.

Teorema

Si dos subgrupos discretos cocompactos $\Gamma, \Gamma' \leq G$ tienen el mismo número de clases de conjugación con un mismo peso y clase en G, entonces Γ y Γ' son equivalentes en representaciones.

Espectro de grupos Kleineanos aritméticos del tipo más simple

Sea k un cuerpo de números que tiene un único lugar complejo y A un álgebra de cuaterniones de división sobre k en que todos los lugares reales de k ramifican.

Sean $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ órdenes maximales de A que no son conjugados y $\Gamma_{\mathcal{O}}, \Gamma_{\mathcal{O}'}$ los grupos Kleineanos aritméticos asociados.

Hemos visto que $\Gamma_{\mathcal{O}}, \Gamma_{\mathcal{O}'}$ son cocompactos.

Dado un grupo U y un elemento $x \in U$, denotamos por $[x]_U$ la clase de conjugación de x en U.

Ejercicio

El embedding ψ de A^1 en $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ induce una biyección entre elementos $\mathcal{O}^1 \setminus \{\pm 1\}$ y $\Gamma_{\mathcal{O}} \setminus \{\pm 1\}$. Sea $x \in \mathcal{O}^1 \setminus \{\pm 1\}$ tal que $\gamma = \psi(x)$ es el elemento correspondiente de $\Gamma_{\mathcal{O}} \setminus \{\pm 1\}$. El centralizador $C(\gamma, \Gamma)$ corresponde a $k(x) \cap \mathcal{O}^1$ y la clase de conjugación $[\gamma]_G \cap \Gamma_{\mathcal{O}}$ corresponde a $[x]_A \cap \mathcal{O}^1$.

Notar que el cuerpo $k(x)$ es una extensión cuadrática de k que se incrusta en A y $\Omega := k(x) \cap \mathcal{O}$ es un $\mathcal{O}_k$-orden cuadrático de $k(x)$. Llamaremos Ω al **orden de la clase de conjugación de** x.

Esta discusión y un resultado de Eichler nos permiten deducir lo siguiente.

Teorema

Supongamos que $\mathcal{O}^1$ y $\mathcal{O}'^1$ tienen el mismo número de clases de conjugación de elementos con una traza reducida fija y orden fijos, entonces $\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathbf{H}^3$ y $\Gamma_{\mathcal{O}'} \backslash \mathbf{H}^3$ son fuertemente isospectrales.

Hemos reducido nuestra construcción de 3-variedades hiperbólicas isospectrales al estudio del número de clases de conjugación de elementos en un álgebra de cuaterniones con traza reducida fija.

Para simplificar aún más este problema haremos uso del siguiente hecho, probado por Maclachlan y Reid.

Teorema

Sea $\mathcal{O}$ como antes y asumimos que $\Gamma_{\mathcal{O}}$ contiene un elemento de traza t. Entonces el número de clases de conjugación en $\Gamma_{\mathcal{O}}$ de elementos de $\Gamma_{\mathcal{O}}$ con traza t es independiente de la elección del orden maximal $\mathcal{O}$.

A la luz del último teorema, es suficiente mostrar que si Ω es un $\mathcal{O}_k$-orden cuadrático que se incrusta en $\mathcal{O}$ entonces Ω se incrusta en $\mathcal{O}'$ también.

En efecto, si $\Omega = \mathcal{O}_k[x]$ entonces todo embedding de Ω en $\mathcal{O}$ determina (y es determinado por) un elemento de $\mathcal{O}$ con el mismo polinomio característico que x, la imagen en $\mathcal{O}$ de x.

La pregunta de si todo orden maximal de A admite un embeding de un orden cuadrático fijo Ω tiene una larga historia que retrocede al trabajo de Chevalley en los 1930's.

En 1999, Chinburg y Friedman resolvieron completamente este problema y mostraron que la proporción de clases de isomorfismos de órdenes maximales de A que admite un embeding de Ω es igual a 0, $\frac{1}{2}$ o 1.

Teorema (Chinburg-Friedman)

Sea k un cuerpo de números y A un álgebra de cuaterniones sobre k para el que $A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \ncong \mathbb{H}^{[k:\mathbb{Q}]}$. Si A es ramificado en un primo finito de k y Ω es un $\mathcal{O}_k$-orden cuadrático que se incrusta en un orden maximal de A entonces todo orden maximal de A admite un embeding de Ω.

De la discusión anterior concluimos lo siguiente.

Teorema

Sea k un cuerpo de números con un único lugar complejo y A un álgebra de cuaterniones de división sobre k que ramifica en todos los lugares reales de k. Sean $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ órdenes maximales de A que no son conjugados. Si A ramifica en un primo finito de k entonces las variedades $\Gamma_{\mathcal{O}}\backslash\mathbf{H}^3$ y $\Gamma_{\mathcal{O}'}\backslash\mathbf{H}^3$ son fuertemente isospectrales.

Para estar seguros de que las 3-variedades hiperbólicas que construimos no son isométricas primero vemos que si $\Gamma_{\mathcal{O}}\backslash\mathbf{H}^3$ y $\Gamma_{\mathcal{O}'}\backslash\mathbf{H}^3$ fueran isométricas entonces habría un elemento γ en $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ para el que $\Gamma_{\mathcal{O}} = \gamma\Gamma_{\mathcal{O}'}\gamma^{-1}$.

La siguiente proposición demuestra que esto a su vez prueba que $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ son conjugados en A^*.

Proposición

Si $\Gamma_{\mathcal{O}} = \gamma\Gamma_{\mathcal{O}'}\gamma^{-1}$ para algún $\gamma \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, entonces $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ son conjugados en A^*.

Ejemplo

Sea $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ y consideramos los ideales $\mathfrak{p}_1 = (11)$ y $\mathfrak{p}_2 = (3 + 2\sqrt{-5})$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

Ambos son ideales primos y tienen normas 121 y 29.

Sea A el álgebra de cuaterniones de división sobre k definida por $\mathrm{Ram}(A) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$.

Usando MAGMA, podemos verificarse que

$$A \cong \left(\frac{44 - 11\sqrt{-5}, -38 - 6\sqrt{-5}}{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})} \right)$$

y que el número de tipo de A es dos.

Existen órdenes maximales $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ de A que no son conjugados.

Sigue del teorema que las 3-variedades hiperbólicas aritméticas $\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash \mathbf{H}^3$ y $\Gamma_{\mathcal{O}'} \backslash \mathbf{H}^3$ son fuertemente isospectrales pero no isométricas.

Ahora calcularemos el volumen de nuestras 3-variedades hiperbólicas isospectrales.

(La ley de Weyl implica que las variedades Riemannianas compactas isospectrales tienen siempre el mismo volumen).

En este caso tenemos

$$d_k = 20$$

y

$$\zeta_k(2) = 1{,}85555689374712063476271341165\ldots$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\Gamma_{\mathcal{O}}\backslash\mathbf{H}^3) = \mathrm{Vol}(\Gamma_{\mathcal{O}'}\backslash\mathbf{H}^3) &= \frac{20^{3/2}\cdot(1{,}8555\ldots)\cdot(121-1)\cdot(29-1)}{4\pi^2}\\ &= 14125{,}336712\ldots\end{aligned}$$

Observación

Notar que el Teorema de Rigidez de Mostow implica que cualquier isomorfismo de $\Gamma_{\mathcal{O}}$ y $\Gamma_{\mathcal{O}'}$ debería ser inducido por una isometría de $\Gamma_{\mathcal{O}}\backslash\mathbf{H}^3$ y $\Gamma_{\mathcal{O}'}\backslash\mathbf{H}^3$. Sigue que nuestras 3-variedades fuertemente isospectrales y no isométricas tienen grupos fundamentales no isomorfos.