CUADERNILLO DE ÁLGEBRA

M. S. Iriondo, S. Smith, P. G. Bercoff

Instituto Universitario Aeronáutico — Año 2002

Contenidos

Capítulo 1

El determinante

Es un hecho conocido que todo número real $a \neq 0$ posee un inverso multiplicativo, usualmente denotado por a^{-1}. Este número satisface las igualdades $a.a^{-1} = 1$ y $a^{-1}.a = 1$. Dicho de otro modo, el único número real que no posee inverso multiplicativo es el cero.

Sabemos también que si A es una matriz cuadrada, su inversa A^{-1} (definida como la matriz que satisface $AA^{-1} = I = A^{-1}A$) puede o no existir. Si todos los elementos de A son ceros, la inversa de A claramente no existe. Pero hay matrices cuyos elementos son todos distintos de cero que tampoco tienen inversa, como así también matrices con algunos elementos nulos que sí la tienen.

¿Habrá alguna forma de decidir si una matriz cuadrada A posee inversa, sin calcular esta última? Afortunadamente, la respuesta a esta pregunta es "sí". Para cada matriz cuadrada A existe un número real asociado a ella, llamado **determinante de $\boldsymbol{A}$** y denotado por **$\mathbf{det}(\boldsymbol{A})$**, que está directamente relacionado con la existencia de la inversa de la matriz.

A fin de lograr una mejor comprensión del tema, definiremos primero determinante de una matriz 1×1, luego de una matriz 2×2 y finalmente daremos la definición para el caso general $n \times n$.

Definición: Sea $A = (a)$ una matriz 1×1. Entonces:

$$\det(A) = a$$

EJEMPLOS

1. $\det(4) = 4$

2. $\det(-1) = -1$

3. $\det(0) = 0$

Por lo dicho al comienzo, es evidente que una matriz A 1×1 posee inversa si y sólo si $\det(A) \neq 0$. Más aún, si $A = (a)$ y $\det(A) \neq 0$, entonces la inversa de A es la matriz 1×1 (a^{-1}), puesto que $a.a^{-1} = 1$.

EJEMPLOS

1. $(4)^{-1} = (1/4)$
2. $(-1)^{-1} = (-1)$
3. $(0)^{-1}$ no existe

Consideremos ahora una matriz 2×2:

Definición: Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz 2×2. Entonces:

$$\det(A) = ad - bc.$$

Notación: el determinante de una matriz se denota con barras verticales que encierran a los elementos de la misma. Para el caso de la matriz de la definición anterior, por ejemplo, las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\det(A) \qquad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{vmatrix}$$

EJEMPLOS

1. $\det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 2 \times 6 - (-3) \times 5 = 27$
2. $\det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = (-1) \times (-2) - 4 \times 3 = -10$
3. $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 6 \times 2 = -9$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - 4 \times 3 = 0$

Observemos que el determinante de una matriz puede ser cero a pesar que ninguno de sus elementos sea nulo.

¿Será cierto que una matriz A 2×2 es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$?. La respuesta a esta pregunta no es tan obvia como en el caso de matrices 1×1.

Proposición: Sea A una matriz 2×2. Entonces:

$$A \text{ tiene inversa } \iff \det(A) \neq 0.$$

Demostración:

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz 2×2 dada. Definamos $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ y efectuemos el producto matricial AB:

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$AB = \det(A)\, I. \tag{1.1}$$

Lo mismo ocurre con el producto BA.

Probemos la implicación ($\Rightarrow$), esto es, tomemos como hipótesis que existe A^{-1} y demostremos que $\det(A) \neq 0$. Procederemos por el absurdo, o sea postularemos $\det(A) = 0$ y llegaremos a una contradicción de la hipótesis asumida:

Si $\det(A) = 0$, la ecuación (1.1) nos dice que:

$$AB = 0$$

(observemos que este cero representa a la matriz 2×2 cuyos elementos son todos iguales a cero). Multiplicando ambos miembros por A^{-1} obtenemos:

$$A^{-1}AB = 0.$$

Pero $A^{-1}A = I \neq 0$, de donde resulta $B = 0$, es decir, $a = b = c = d = 0$, lo cual es absurdo puesto que A posee inversa. Por lo tanto $\det(A) \neq 0$.

Probemos ahora la implicación ($\Leftarrow$). Suponemos que $\det(A) \neq 0$ y debemos demostrar que existe la inversa de A. Para ello basta con encontrar una expresión para A^{-1}. Por ser $\det(A) \neq 0$, existe el número real $\dfrac{1}{\det(A)}$. Entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} B$, ya que:

$$AA^{-1} = A \frac{1}{\det(A)} B = \frac{1}{\det(A)} AB = \frac{1}{\det(A)} \det(A)\, I = I$$

y lo mismo ocurre con el producto $A^{-1}A$. Por lo tanto, A es invertible y $A^{-1} = \dfrac{B}{\det(A)}$.

EJEMPLO

¿Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ invertible?

Solución: $\det(A) = 7 - 3 = 4 \neq 0$, por lo tanto A es invertible.

A partir de la definición dada para el determinante de matrices 2×2, se pueden demostrar fácilmente las propiedades enunciadas a continuación, tarea que se deja para el lector.

Propiedades del determinante de una matriz 2×2

Sea A una matriz 2×2.

1. Si A tiene una fila o columna de ceros, $\det(A) = 0$.
2. Si se intercambian dos filas o dos columnas, el determinante de la matriz resultante es $-\det(A)$.
3. Si una fila o columna de A se multiplica por una constante k, el determinante de la matriz resultante es $k \det(A)$.
4. Si dos filas o columnas de A son iguales, entonces $\det(A) = 0$.
5. Si un múltiplo de una fila (o columna) de A se suma a otra fila (o columna), el determinante de la matriz resultante es $\det(A)$.

Queremos ahora definir el determinante de una matriz A $n \times n$ y comprobar que con la definición dada se verifica que A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$ y que se satisfacen las propiedades arriba enunciadas.

Para ello usaremos la definición de determinante de matrices de menor tamaño: el determinante de una matriz 3×3 se calculará usando la definición que ya hemos dado para el determinante de matrices 2×2; el determinante de una matriz 4×4 se calculará a partir de la definición obtenida para matrices 3×3, y así sucesivamente.

Para enunciar la regla que permite calcular el determinante de una matriz $n \times n$ es necesario definir antes el concepto de **cofactor- (i, j)**.

Definición: Sea A una matriz $n \times n$. El cofactor-(i, j) de A, denotado por $C_{ij}(A)$, está dado por:

$$C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

donde M_{ij} es el determinante de la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de A al eliminar la fila i y la columna j.

EJEMPLO

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 5 & -2 & 7 \\ 8 & 9 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule el cofactor-$(2, 1)$ de A.

Solución:
$C_{21}(A) = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -(-4-54) = 58$

Ahora estamos en condiciones de enunciar la regla para calcular el determinante de una matriz $n \times n$, asumiendo que sabemos calcular el determinante de una matriz $(n-1) \times (n-1)$.

Definición: Sea A una matriz $n \times n$ y supongamos que se ha definido el determinante de matrices $(n-1) \times (n-1)$. Entonces:

$$\det(A) = a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A) + \cdots + a_{1n}C_{1n}(A),$$

donde $C_{ij}(A)$ es el cofactor-(i, j) de la matriz A.

Esta definición nos dice que el determinante de A se puede calcular multiplicando cada elemento a_{1j} de la primera fila de A por el correspondiente cofactor-$(1, j)$ y sumando luego estos resultados. Esta expresión se conoce como **expansión de Laplace** del determinante de A a lo largo de la primera fila.

EJEMPLO

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\,(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\,(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1.(-1) + (-2).5 + 1.2 \\
&= -9
\end{aligned}
$$

Se puede demostrar (no lo haremos) que el determinante se puede calcular mediante la expansión de Laplace a lo largo de *cualquier* fila, es decir multiplicando cada elemento a_{ij} de la fila i de A por el correspondiente cofactor C_{ij} y sumando los resultados. Más aún, también se puede calcular el determinante haciendo la expansión de Laplace a lo largo de *cualquier columna* de A.

Teorema: El determinante de una matriz A $n \times n$ se puede computar usando la expansión de Laplace a lo largo de una fila o una columna arbitraria.

Corolario: $\det(A) = \det(A^T)$.

EJEMPLO

Desarrollaremos el siguiente determinante por la primera columna y luego por la segunda fila:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -1 - 2.5 + 2 \\
&= -9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -2.5 + 1 \\
&= -9.
\end{aligned}
$$

La propiedad enunciada en el teorema facilita el cálculo del determinante cuando la matriz posee elementos nulos: basta con elegir la fila o columna que contenga más ceros.

EJEMPLOS

1. Conviene desarrollar el siguiente determinante por la primera fila o bien por la última columna:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3\left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= 3(1 - 2 \cdot 3) \\ &= -15 \end{aligned}$$

2. El cálculo del determinante de la siguiente matriz se simplifica si hacemos el desarrollo de Laplace por la primera columna:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 4 \\ &= 8. \end{aligned}$$

La matriz del segundo ejemplo, que tiene ceros en todas las posiciones que están por debajo de la diagonal principal, recibe el nombre de **matriz triangular superior**.

Del mismo modo, una matriz cuyos elementos por encima de la diagonal principal son todos nulos recibe el nombre de **matriz triangular inferior**. En general, ambas se denominan matrices triangulares.

EJEMPLO

Las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

son triangulares (superior e inferior respectivamente).

Teorema: Si A $n \times n$ es una matriz triangular, el determinante A es igual al producto de los elementos de la diagonal principal:

$$\det(A) = a_{11}.a_{22}. \cdots .a_{nn}.$$

Demostración: se deja como ejercicio para el lector.

Las propiedades enunciadas para el determinante de matrices 2×2 también son válidas para el caso de matrices $n \times n$.

Propiedades del determinante de una matriz $n \times n$.

Sea A una matriz $n \times n$.

1. Si A tiene una fila o una columna de ceros, $\det(A) = 0$.
2. Si se intercambian dos filas o columnas de A, el determinante de la matriz resultante es $-\det(A)$.
3. Si una fila o columna de A se multiplica por una constante k, el determinante de la matriz resultante es $k \det(A)$.
4. Si dos filas o columnas de A son iguales, $\det(A) = 0$.
5. Si se suma un múltiplo de una fila (o columna) de A a otra fila (o columna), el determinante de la matriz resultante es $\det(A)$.
6. Si A se multiplica por cualquier escalar k, el determinante de la matriz resultante es $k^n \det(A)$.

Demostraciones:

1. Utilizamos la expansión de Laplace a lo largo de esa fila o columna.
2. Lo probaremos sólo para $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} \text{a} & \text{b} \\ \text{c} & \text{d} \end{vmatrix} = ad - bc = -(cb - da) = -\begin{vmatrix} \text{c} & \text{d} \\ \text{a} & \text{b} \end{vmatrix}$$

3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} \text{x} & \cdots & \text{x} \\ \text{x} & \cdots & \text{x} \\ & \overline{r}_i & \\ \text{x} & \cdots & \text{x} \end{pmatrix}$$

y sea B la matriz que resulta de multiplicar la fila i de A por la constante k, es decir,

$$B = \begin{pmatrix} \text{x} & \cdots & \text{x} \\ \text{x} & \cdots & \text{x} \\ & k \quad \overline{r}_i & \\ \text{x} & \cdots & \text{x} \end{pmatrix}$$

Si desarrollamos el determinante de B por la fila i, tenemos:

$$\begin{aligned} \det(B) &= k\, r_{i1}C_{i1}(B) + k\, r_{i2}C_{i2}(B) + \ldots + k\, r_{in}C_{in}(B) \\ &= k\,(r_{i1}C_{i1}(B) + r_{i2}C_{i2}(B) + \ldots + r_{in}C_{in}(B)) \\ &= k\,\left(r_{i1}C_{i1}(A) + r_{i2}C_{i2}(A) + \ldots + r_{in}C_{in}(A)\right), \quad \text{puesto que } C_{ij}(A) = C_{ij}(B) \\ &= k\,\det(A) \end{aligned}$$

4. Sea

$$A = \begin{pmatrix} \text{x} & \cdots & \text{x} \\ \text{x} & \cdots & \text{x} \\ & \overline{a}_i & \\ \text{x} & \cdots & \text{x} \\ & \overline{a}_j & \\ \text{x} & \cdots & \text{x} \end{pmatrix},$$

donde $a_{ik} = a_{jk}$ para todo $k = 1, \ldots, n$ (esto es, las filas i y j de la matriz A son iguales). Sea B la matriz que se obtiene de A intercambiando las filas i y j:

$$B = \begin{pmatrix} \text{x} & \cdots & \text{x} \\ \text{x} & \cdots & \text{x} \\ & \overline{a}_j & \\ \text{x} & \cdots & \text{x} \\ & \overline{a}_i & \\ \text{x} & \cdots & \text{x} \end{pmatrix}$$

Por lo probado en el item 2,

$$\det(B) = -\det(A).$$

Pero como las filas i y j de A son iguales, la matriz B es idéntica a la matriz A, de donde

$$\det(B) = \det(A).$$

Entonces $\det(A) = -\det(A)$ y por lo tanto resulta $\det(A) = 0$.

5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} \text{x} & \cdots & \text{x} \\ \text{x} & \cdots & \text{x} \\ & \overline{a}_i & \\ \text{x} & \cdots & \text{x} \\ & \overline{a}_j & \\ \text{x} & \cdots & \text{x} \end{pmatrix},$$

y llamemos B a la matriz que se obtiene de A multiplicando la fila i por c y sumándola a la fila j:

$$B = \begin{pmatrix} \text{x} & \cdots & \text{x} \\ \text{x} & \cdots & \text{x} \\ & \overline{a}_i & \\ \text{x} & \cdots & \text{x} \\ & c\,\overline{a}_i + \overline{a}_j & \\ \text{x} & \cdots & \text{x} \end{pmatrix}.$$

Desarrollemos el determinante de B por la fila j:

$$\begin{aligned}
\det(B) &= (c\,a_{i1}+a_{j1})C_{j1}(B)+\ldots+(c\,a_{in}+a_{jn})C_{jn}(B)\\
&= (c\,a_{i1}+a_{j1})C_{j1}(A)+\ldots+(c\,a_{in}+a_{jn})C_{jn}(A),\\
&= c(a_{i1}C_{j1}(A)+\ldots+a_{in}C_{jn}(A))+(a_{j1}C_{j1}(A)+\ldots+a_{jn}C_{jn}(A))\\
&= c\,\det(D)+\det(A),
\end{aligned}$$

donde

$$D=\begin{pmatrix} \text{x} & \cdots & \text{x}\\ \text{x} & \cdots & \text{x}\\ & \overline{a}_i & \\ \text{x} & \cdots & \text{x}\\ & \overline{a}_i & \\ \text{x} & \cdots & \text{x}\end{pmatrix}.$$

Por propiedad 4, $\det(D)=0$, de donde resulta $\det(B)=\det(A)$.

6. Como del determinante de una matriz puede sacarse un factor común de cualquier fila de la matriz, y como de cada una de las filas de la matriz kA tiene a k como factor común, tenemos que:

$$\begin{vmatrix} k\,a_{11} & \cdots & k\,a_{1n}\\ & \vdots & \\ k\,a_{n1} & \cdots & k\,a_{nn}\end{vmatrix} = k\cdots k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = k^n\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

O sea que $\det(k\,A)=k^n\,\det(A)$.

EJEMPLOS

1. (a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$ (propiedad 1)

   (c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 4\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=0$ (propiedad 4)

2.

$$= \quad -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \quad = \quad -(-8-4) = 12.$$

3. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6,$$

calcule

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}.$$

Solución:

$$= \quad -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ p & q & r \end{vmatrix} \quad = \quad \frac{1}{3}\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$$

$$= \quad 6,$$

por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = 18.$$

4. Encuentre los valores de x para los cuales se cumple que:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Solución:

$$= \quad \begin{vmatrix} 1-x^2 & x-x^2 \\ x-x^2 & 1-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \quad \begin{vmatrix} (1-x)\cdot(1+x) & x\cdot(1-x) \\ x\cdot(1-x) & (1-x)\cdot(1+x) \end{vmatrix}$$

$$= \quad (1-x)^2\begin{vmatrix} 1+x & x \\ x & 1+x \end{vmatrix}$$

$$= \quad (1-x)^2(2x+1) = 0,$$

de donde resulta:

$$x = 1 \qquad \text{ó} \qquad x = -\frac{1}{2}$$

Teorema: Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces:

$$\det(AB) = \det(A).\,\det(B)$$

Omitimos la demostración de este teorema, ya que excede el nivel de este curso.

Teorema: Sea A una matriz $n \times n$.

$$A \text{ es invertible} \iff \det(A) \neq 0.$$

Demostración:
$(\Rightarrow)$
A invertible $\quad\Rightarrow\quad AA^{-1} = I \quad\Rightarrow\quad \det(AA^{-1}) \neq 0 \quad\Rightarrow\quad$ por teorema anterior, $\det(A) \neq 0$.

$(\Leftarrow)$
Sea R la matriz escalonada que resulta de A por medio de operaciones elementales por filas (o columnas), es decir:

$$R = E_k \cdots E_1 A = R, \qquad \text{o bien} \qquad A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} R.$$

Aplicando el teorema anterior,

$$\det(A) = \det(E_1^{-1}).\ \cdots\ .\det(E_k^{-1}).\det(R).$$

Por hipótesis, $\det(A) \neq 0$, de donde resulta $\det(R) \neq 0 \quad\Rightarrow\quad A \sim R \quad\Rightarrow\quad A$ es invertible.

Corolario:

$$A \text{ invertible} \quad\Rightarrow\quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

1.1 Sistemas lineales de la forma $A\ \mathbf{x} = \lambda\ \mathbf{x}$

Muchas aplicaciones del Álgebra Lineal están relacionadas con sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas, que se expresan como

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\,, \tag{1.2}$$

donde λ es un escalar. Éstos son realmente sistemas lineales homogéneos encubiertos, ya que (1.2) puede escribirse de nuevo como

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

o, insertando una matriz identidad y factorizando, como:

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\,. \tag{1.3}$$

EJEMPLO
El sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= \lambda x_1 \\ 4x_1 + 2x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

que es de la forma (1.2), con $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Este sistema puede volver a escribirse como

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es de la forma (1.3), con $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.

El problema de interés esencial en sistemas lineales de la forma (1.3) es determinar los valores para los cuales el sistema tiene una solución no trivial. Cada uno de los valores λ que cumplen con esta condición se denomina **valor característico** o **autovalor** [1] de A. Si λ es un autovalor de A, entonces las soluciones no triviales de (1.3) se denominan **autovectores** de A correspondientes a λ.

[1] En algunos libros de texto también suele encontrarse la palabra **eigenvalor**.

De acuerdo con el último teorema visto en la sección precedente, el sistema lineal $(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ tiene una solución no trivial si y sólo si

$$\det(A-\lambda I)=0\,.$$

Ésta se denomina **ecuación característica** de A. Los autovalores de A se pueden encontrar resolviendo esta ecuación para λ.

EJEMPLO

Determine los autovalores y autovectores correspondientes a la matriz $A=\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}$.

Solución:

La ecuación característica de A es

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&3\\4&2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

o bien

$$\lambda^2-3\lambda-10=0.$$

Esta es una ecuación cuadrática cuyas raíces son $\lambda_1=-2$ y $\lambda_2=5$ (compruébelo).

Por definición, sabemos que $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ es un autovector de A si y sólo si $\mathbf{x}$ es una solución no trivial de $(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, es decir:

$$\begin{pmatrix}1-\lambda&3\\4&2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Si $\lambda=\lambda_1=-2$, entonces (1.4) se convierte en

$$\begin{pmatrix}3&3\\4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Resolviendo este sistema obtenemos $x_1=-t$, $x_2=t$, $t\in I\!R-\{0\}$ (compruébelo), de modo que los autovectores correspondientes a $\lambda=-2$ son las soluciones diferentes de cero de la forma

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\t\end{pmatrix}.$$

De nuevo por (1.4) los autovectores de A correspondientes a $\lambda=\lambda_2=5$ son las soluciones no triviales de

$$\begin{pmatrix}-4&3\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Dejamos como ejercicio la resolución de este sistema y la comprobación de que los autovectores de A correspondientes a $\lambda=5$ son las soluciones diferentes de cero de la forma

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}t\\t\end{pmatrix}.$$

El estudio en profundidad del problema de autovalores y autovectores excede el alcance de este curso.

Capítulo 2

Inducción Matemática

Consideremos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ 1+3+5+7+9 &= 25. \end{aligned}$$

Es evidente que existe un patrón en la secuencia. Si llamamos n al número de términos del miembro izquierdo de cada una de las ecuaciones, el miembro derecho es n^2 y el miembro izquierdo está formado por la suma de los primeros n números naturales impares.

Podemos escribir los números impares como:

$$\begin{aligned} 1 &= 2\cdot 1-1 \\ 3 &= 2\cdot 2-1 \\ 5 &= 2\cdot 3-1 \\ 7 &= 2\cdot 4-1 \\ 9 &= 2\cdot 5-1. \end{aligned}$$

De esto resutlta claro que el $n-$ésimo número impar es $2n-1$, por lo tanto, al menos para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5, se verifica que:

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2 \qquad\qquad (S_n)$$

La cuestión es si esta afirmación es válida *para todo* n. No es posible verificarla para cada natural n, ya que hay infinitos números naturales, por lo que debemos encontrar otra forma de hacerlo.

Para esto se usa lo que se conoce como **principio de inducción matemática**. Este principio se basa en la siguiente idea: Supongamos que la afirmación S_{n+1} es verdadera cada vez que S_n lo es. Es decir, supongamos que probamos que si S_n es verdadera entonces necesariamente S_{n+1} debe ser verdadera. Ahora, si podemos demostrar que S_1 es verdadera resulta que S_2 también debe serlo. Pero si S_2 es verdadera, S_3 también debe serlo, y así sucesivamente.

A continuación enunciaremos formalmente este principio:

Sea S_n una afirmación acerca del número natural n para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ y supongamos que se verifica que:

1. S_1 es verdadera.
2. $S_n \Rightarrow S_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

Entonces S_n es verdadera para todo $n \geq 1$.

El principio de inducción es una de las técnicas más útiles en matemática y se aplica en una gran cantidad de situaciones. Los siguientes ejemplos son una prueba de ello.

EJEMPLO

Demuestre que $1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ para todo $n\geq 1$.

Solución:

Llamemos S_n a la afirmación $1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$. Ahora aplicamos la inducción:

1. Primero debemos probar que S_1 es verdadera. La afirmación S_1 es $1=\frac{1}{2}1(1+1)$, lo cual es verdadero.

2. Ahora lo que debemos probar es que $S_n \Rightarrow S_{n+1}$. *Suponemos* que S_n es verdadera, es decir que $1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$. Debemos probar que S_{n+1} es verdadera, o sea que $1+2+\ldots+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, para lo cual podemos usar la suposición anterior, de que S_n es verdadera. El miembro izquierdo de S_{n+1} es la suma de los primeros $n+1$ naturales, por lo tanto el penúltimo término es n. Esto nos permite escribir que:

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+(n+1) &= (1+2+\ldots+n)+(n+1) \\ &= \tfrac{1}{2}n(n+1)+(n+1) \quad \text{usando } S_n \\ &= \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

   Esto demuestra que S_{n+1} es verdadera, completando así la inducción.

En la demostración de la implicación $S_n \Rightarrow S_{n+1}$ *suponemos* que S_n es verdadera y usamos esto para probar que S_{n+1} también lo es. La suposición de que S_n es verdadera se denomina **hipótesis inductiva**.

EJEMPLOS

1. Si $x\neq 1$ pruebe que $1+x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ para todo $n\geq 1$.

   Solución:

   Llamemos S_n a la afirmación $1+x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Ahora aplicamos la inducción:

   (a) La afirmación S_1 es $1+x=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, lo cual es verdadero, ya que $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

   (b) $S_n \Rightarrow S_{n+1}$. *Suponemos* que S_n es verdadera, es decir que $1+x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$. A partir de esta afirmación debemos deducir que S_{n+1} es verdadera, o sea que $1+x+x^2+\ldots+x^{n+1}=\dfrac{x^{n+2}-1}{x-1}$. Entonces:

$$\begin{aligned} 1+x+x^2+\ldots+x^{n+1} &= (1+x+x^2+\ldots+x^n)+x^{n+1} \\ &= \frac{x^{n+1}-1}{x-1}+x^{n+1} \quad \text{usando } S_n \\ &= \frac{x^{n+1}-1+x^{n+1}(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{x^{n+2}-1}{x-1}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que S_{n+1} es verdadera, completando así la inducción.

2. Demuestre que: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k) = n^2(n+1)$ para todo $n \geq 1$

   Solución:

   Sea S_n la afirmación $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k) = n^2(n+1)$. Aplicando inducción:

   (a) S_1 establece que $(3 \cdot 1^2 - 1) = 1^2(1+1)$, lo cual es verdadero.

   (b) $S_n \Rightarrow S_{n+1}$. Suponemos que S_n es verdadera. A partir de esta afirmación debemos deducir que S_{n+1} también es verdadera:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}(3k^2-k) &= \sum_{k=1}^{n}(3k^2-k)+[3(n+1)^2-(n+1)] \\ &= n^2(n+1)+(n+1)[3(n+1)-1] \\ &= (n+1)[(n+1)(n+2)] \\ &= (n+1)^2(n+2) \end{aligned}$$

   Esto demuestra que S_{n+1} es verdadera.

3. Demuestre que $7^n + 2$ es múltiplo de 3 para todo $n \geq 1$.

   Solución:

   (a) S_1 es verdadera, puesto que $7^1 + 2 = 9$ es múltiplo de 3.

   (b) $S_n \Rightarrow S_{n+1}$. Suponemos que $7^n + 2$ es múltiplo de 3, es decir, existe un entero k tal que $7^n + 2 = 3k$. Entonces:

$$7^{(n+1)}+2 = 7\cdot 7^n + 2 = 7(3k-2)+2 = 21k-12 = 3(7k-4)\,,$$

   por lo tanto $7^{n+1}+2$ es múltiplo de 3.

En los ejemplos anteriores hemos usado el principio de inducción comenzando con $n = 1$, es decir, hemos verificado que se satisface S_1 y que $S_n \Rightarrow S_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, concluyendo que S_n es verdadera para todo $n \geq 1$. Sin embargo, es posible usar el principio de inducción a partir de un número natural m cualquiera (fijo), no necesariamente igual a 1. En otras palabras, si demostramos que:

1. S_m es verdadera

2. $S_n \Rightarrow S_{n+1}$ para todo $n \geq m$

entonces podemos afirmar que S_n es verdadera para todo $n \geq m$.

EJEMPLO

Pruebe que: $2^n < n!$ para todo $n \geq 4$

Solución:

Observemos que $2^n < n!$ es falso para $n = 1, 2, 3$.

1. S_4 es verdadera pues $2^4 = 16 < 24 = 4!$.
2. $S_n \Rightarrow S_{n+1}$ para $n \geq 4$. Suponemos que S_n es verdadera, o sea $2^n < n!$. Entonces:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &< 2 \cdot n! \quad \text{pues } 2^n < n! \\ &< (n+1) \cdot n! \quad \text{pues } 2 < n+1 \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

De esto resulta que S_{n+1} es verdadera.

Capítulo 3

Números Complejos

3.1 Introducción

Muchos de los problemas en los que se aplica la matemática involucran la solución de ecuaciones. A través de los años, el sistema numérico ha debido ser expandido muchas veces de manera de proporcionar soluciones para distintos tipos de ecuaciones.

Así, por ejemplo, agregando el cero y los números negativos a los naturales se crearon los enteros ($\mathbb{Z}$) para las soluciones de ecuaciones del tipo:

$$x + n = m \qquad (n,\, m \ \in \mathbb{N})\,.$$

Mediante la adición de números de la forma m/n se obtiene el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$), donde se pueden encontrar soluciones para ecuaciones del tipo:

$$ax + b = 0 \qquad (a,\, b \ \in \ \mathbb{Z},\ \text{primos entre sí y} \ \ a \neq 0)\,.$$

Otra extensión del sistema de números incluye los irracionales, creando el conjunto de los reales ($\mathbb{R}$), en los que se pueden encontrar soluciones a ecuaciones cuadráticas del tipo

$$x^2 = a \qquad (a \ \in \mathbb{Q}, \quad a \geq 0)\,.$$

Sin embargo, otras ecuaciones cuadráticas, como por ejemplo

$$p(x) = x^2 + 1 = 0\,,$$

no tienen solución ni siquiera en $\mathbb{R}$, ya que no existe ningún número real que elevado al cuadrado sea negativo. De manera que está claro que el proceso de extensión del sistema de números no está completo.

Para poder resolver *cualquier* ecuación cuadrática necesitamos expander el sistema de números reales a un conjunto más grande, con reglas de suma y multiplicación análogas a las correspondientes para $\mathbb{R}$: el sistema de los **números complejos**, $\mathbb{C}$.

3.2 Definición de números complejos

Comenzamos definiendo el número imaginario i (llamado **unidad imaginaria**) como una de las soluciones de la ecuación

$$p(x) = x^2 + 1 = 0\,, \tag{3.1}$$

o sea, si i es solución de (3.1) se verifica que

$$i^2 + 1 = 0\,,$$

o, equivalentemente:

$$i^2 = -1\,,$$

y escribimos "$i = \sqrt{-1}$".

Observemos que si definimos:

$$-i = -1 \cdot i\,,$$

entonces

$$\begin{aligned}(-i)^2 &= (-i)\cdot(-i)\\ &= (-1)\cdot i\cdot(-1)\cdot i\\ &= (-1)\cdot(-1)\cdot i\cdot i\\ &= i^2\,.\end{aligned}$$

Por lo que, si el número i es solución de (3.1), $-i$ también lo es.

Es evidente que i no es un número real, ya que ningún número real tiene una raíz cuadrada negativa.

Definición: Un número complejo es una expresión de la forma $a+b\,i$ o $a+i\,b$, donde a y b son números reales, e i es la unidad imaginaria ($i^2=-1$).

A veces resulta conveniente representar un número complejo por una sola letra; z y w son las más usadas, habitualmente.

Si a, b, x e y son números reales, y $z=a+b\,i$, $w=x+y\,i$ entonces podemos referirnos a los números complejos z y w.

Notemos que $z=w$ si y sólo si $a=x$ y $b=y$.

Son destacables los siguientes números complejos:

$$0=0+0\,i\,,\qquad 1=1+0\,i\,,\qquad i=0+1\,i\,.$$

Definición: Si $z=x+y\,i$ es un número complejo ($x,y\in I\!R$), x se llama **parte real** de z y se denota $Re(z)$, y se llama **parte imaginaria** de z y se denota $Im(z)$:

$$Re(z)=Re(x+y\,i)=x\,,\qquad Im(z)=Im(x+y\,i)=y\,.$$

Notemos que tanto la parte real como la imaginaria de un número complejo son números reales.

EJEMPLOS

$Re(3-5\,i)=3$	$Im(3-5\,i)=-5$
$Re(2\,i)=Re(0+2\,i)=0$	$Im(2\,i)=Im(0+2\,i)=2$
$Re(-7)=Re(-7+0\,i)=-7$	$Im(-7)=Im(-7+0\,i)=0$

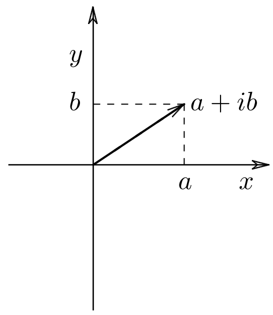

Figura 3.1: Representación gráfica del número complejo $z = a + b\,i$ en el plano cartesiano.

3.3 Representación gráfica de los complejos

Como los números complejos se construyen a partir de pares ordenados de números reales (sus partes real e imaginaria), es natural representar gráficamente a los números complejos como puntos en el pano cartesiano. Usamos el punto $(a,\, b)$ para representar al número complejo $z = a + b\,i$ (figura 3.1).

En particular, el origen $(0,\, 0)$ representa al número complejo 0, el punto $(1,\, 0)$ representa al número complejo $1 = 1 + 0\,i$ y el punto $(0,\, 1)$ al número complejo $i = 0 + 1\,i$.

Como cada número complejo está representado por un único punto en el plano, el conjunto de los números complejos también se conoce como **plano complejo**. Los puntos sobre el eje x del plano $\mathbb{C}$ corresponden a los números reales ($x = x + 0\,i$) y el eje x se llama **eje real**. Los puntos sobre el eje y corresponden a los números **imaginarios puros** ($y\,i = 0 + y\,i$), por lo que el eje y se llama **eje imaginario**.

Definición: Dado el número complejo $z = a + b\,i$:

- Llamamos **módulo** de z (y denotamos $|z|$ o $|a+b\,i|$) a la distancia desde el origen al punto $(a,\, b)$ correspondiente a z:

$$|z| = |a + b\,i| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

- Llamamos **argumento** de z (y denotamos $arg(z)$ o $arg(a+b\,i)$) al ángulo θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) que forma la línea desde el origen al punto $(a,\, b)$ con el eje real, midiendo ángulos positivos en sentido antihorario.

Observemos que la definición del argumento en cierto modo es arbitraria, ya que podríamos haber tomado por ejemplo $-\pi \leq \theta < \pi$, ó $-3\pi \leq \theta < -\pi$, etc. Cuando $0 \leq \theta < 2\pi$ se dice que se considera el **argumento principal** del número complejo. Esta es la forma que usaremos de aquí en más.

Forma Polar

Dado el módulo $r = |z|$ y el argumento $\theta = arg(z)$, tenemos que $a = r\cos\theta$ y $b = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, como puede verse en la figura 3.2. De esta manera, vemos que z puede ser expresado en términos de su módulo y su argumento como

$$z = r\cos\theta + i\,r\ \mathrm{sen}\ \theta.$$

$a = r\ \cos\theta$

$b = r \text{ sen } \theta$

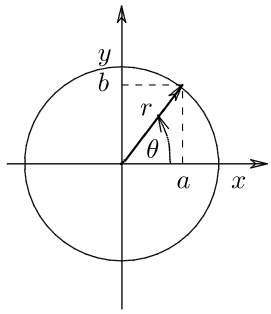

Figura 3.2: Representación gráfica del módulo y argumento de $z = a + b\,i$.

Definición: Dado el número complejo $z = a + b\,i$:

(a) Si $\mathrm{e}^{i\theta} \equiv \cos\theta + i \text{ sen } \theta$, podemos escribir:

(b) $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, donde $0 \leq \theta < 2\pi$ y $\quad \cos\theta = \frac{a}{r}$; $\quad \text{sen } \theta = \frac{b}{r}$.

En (b) hemos expresado el número complejo z en su **forma polar**.

EJEMPLO
Escriba en forma polar el número complejo $z = -\sqrt{3} + i$.
Solución: $r = \sqrt{3+1} = 2$, $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ y sen $\theta = \frac{1}{2}$. Entonces $\theta = \frac{5}{6}\pi$ y $z = 2\mathrm{e}^{i\frac{5}{6}\pi}$.

Conjugado de un número complejo

Definición: El **conjugado** o **complejo conjugado** de un número complejo $z = a + b\,i$ es otro número complejo, denotado $\overline{z}$, dado por:

$$\overline{z} = a - b\,i\,.$$

EJEMPLOS

$$\overline{2-3\,i} = 2+3\,i\,, \qquad \overline{3} = 3\,, \qquad \overline{2\,i} = -2\,i$$

En la figura 3.3 se muestra la representación gráfica del número $z = a + b\,i$ y su correspondiente complejo conjugado $\overline{z} = a - b\,i$.

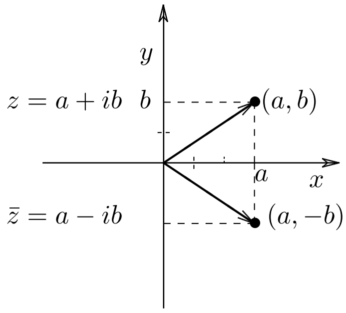

Figura 3.3: Representación gráfica del número complejo $z = a + b\,i$ y su conjugado $\overline{z} = a - b\,i$.

A partir de esta definición y de la de módulo ($|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$) podemos concluir que:

$$|\overline{z}| = |z|\,.$$

Proposición: Para cualquier número complejo se cumple que:

$$z\overline{z} = |z|^2\,.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a+b\,i)(a-b\,i) \\ &= a^2 - ab\,i + ba\,i + b^2 \\ &= a^2 + b^2 = |z|^2\,. \end{aligned}$$

3.4 Aritmética de números complejos

Como vimos en la Sección anterior, los números complejos pueden ser identificados con vectores bidimensionales (en $I\!R^2$) cuyas componentes son las partes reales e imaginarias de los complejos.

Entonces, podemos definir la suma y multiplicacion con números reales (escalares) del mismo modo que para los vectores, es decir, sumando las partes reales e imaginarias por separado y multiplicando por un escalar a ambas partes:

Suma:

$$(a+b\,i) \pm (c+d\,i) \quad = \quad a \pm c + (b \pm d)\,i$$

Multiplicación por un número real:

$$k(a+b\,i) \;=\; ak+bk\,i\,, \qquad k\in I\!R.$$

EJEMPLO

Sean $z_1 = 4-5i$ y $z_2 = -1+6i$. Calcule:

1. z_1+z_2
2. z_1-z_2
3. $-z_2$
4. $3z_1$

Solución:

$$\begin{array}{lrcl}
1. & z_1+z_2 & = & 4-1+(6-5)i \\
 & & = & 3+i \\
2. & z_1-z_2 & = & 4+1-(5+6)i \\
 & & = & 5-11i \\
3. & -z_2 & = & 1-6i \\
4. & 3z_1 & = & 12-15i.
\end{array}$$

Multiplicación:

Queremos ahora definir una multiplicación entre números complejos que cumpla con las mismas reglas que el producto de números reales. Comenzamos entonces definiendo

$$\begin{aligned}
(a+b\,i)(c+d\,i) &= ad+ad\,i+bc\,i+bd\,i^2 \\
&= ac-bd+(ad+bc)\,i,
\end{aligned}$$

lo cual nos permite decir que el producto de dos números complejos nos da un nuevo número complejo.

División:

Definimos ahora la división de dos números complejos. Dados z_1 y $z_2 \neq 0$, queremos encontrar z tal que

$$z_1 = z\,z_2 \qquad \text{(o sea que “}z = \frac{z_1}{z_2}\text{”).}$$

Multiplicamos la ecuación anterior por $\bar{z}_2$ y obtenemos:

$$z_1\,\bar{z}_2 = z\,|z_2|^2\,, \qquad\qquad \text{con } \frac{1}{|z_2|^2} \;\in\; I\!R\,.$$

Si ahora multiplicamos ambos miembros por $\dfrac{1}{|z_2|^2}$, obtenemos:

$$\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = z\,.$$

EJEMPLO

Sean $z_1 = 4 - 5\,i$ y $z_2 = -1 + 2\,i$. Calcule z_1/z_2.

Solución:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(4-5\,i)(-1-2\,i)}{5} = -\frac{14}{5} - \frac{3}{5}i.$$

Propiedades: Si z y w son dos números complejos, entonces:

1. $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$
2. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
3. $\bar{\bar{z}} = z$
4. z real si y sólo si $\bar{z} = z$.
5. $\bar{z}z = |z|^2$.
6. $|z| \geq 0$, $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$.
7. $|zw| = |z||w|$ y $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.
8. $|z + w| \leq |z| + |w|$.

La demostración de estas propiedades queda como ejercicio para el lector.

3.5 Ecuaciones de segundo grado

Consideremos primero la ecuación de segundo grado

$$z^2 = a + b\,i\,.$$

Escribiendo $z = x + y\,i$, podemos expresar esta ecuación como:

$$z^2 = (x + y\,i)(x + y\,i) = x^2 - y^2 + 2xy\,i = a + b\,i\,.$$

Sabemos que dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales e imaginarias son iguales, entonces:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b. \end{aligned}$$

Podemos agregar a estas dos ecuaciones una tercera, que nos facilitará la resolución del sistema de ecuaciones, a saber:

$$\begin{aligned} |z^2| &= |z\,z| \\ &= |z|\,|z| \qquad \text{(Por la propiedad (7))} \\ &= |z|^2 \\ &= x^2+y^2\,. \end{aligned}$$

Por otro lado, de la ecuación original tenemos que

$$|z^2| = |a+b\,i|\,,$$

o sea:

$$x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}\,,$$

y el sistema a considerar ahora será:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2-y^2 &= a \\ 2xy &= b, \end{aligned}$$

del cual se obtienen fácilmente los valores de x e y que lo satisfacen.

EJEMPLO

Resuelva la ecuación $z^2=-i$.

Solución:

Como $|z^2| = x^2+y^2$ y $|-i|=1$, el sistema a considerar en este caso es:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1 \\ x^2-y^2 &= 0 \\ 2xy &= -1. \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones obtenemos:

$$2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Cuando $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, la tercera ecuación da $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, y cuando $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, la tercera ecuación da $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$. La respuesta es $z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

Observe que si z_0 es una solución de la ecuación $z^2=-i$, entonces $-z_0$ también lo es.

Consideremos ahora el caso más general de una ecuación de segundo grado:

$$z^2+wz+v=0\,,$$

donde w y v son dos números complejos. Como en el caso de una ecuación con coeficientes reales, completamos cuadrados y obtenemos:

$$z^2 + wz + \frac{w^2}{4} - \frac{w^2}{4} + v = \left(z + \frac{w}{2}\right)^2 - \frac{w^2}{4} + v = 0\,,$$

o sea que, dados w y v tenemos que encontrar los números z tales que:

$$\left(z + \frac{w}{2}\right)^2 = \frac{w^2}{4} - v\,. \tag{3.2}$$

Si sustituimos $u = z + \frac{w}{2}$ en (3.2), transformamos la expresión en una ecuación para u del tipo descripto anteriormente, o sea

$$u^2 = \frac{w^2}{4} - v.$$

Si denotamos a las soluciones de esta ecuación como

$$\text{“} \quad u_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{w^2}{4} - v} \quad \text{”}\,,$$

entonces las soluciones de la ecuación original se escribirán

$$z_{1,2} = -\frac{w}{2} \mp \sqrt{\frac{w^2}{4} - v}.$$

EJEMPLO

Resuelva la ecuación $z^2 + 2z + (1 - i) = 0$.

Solución:

Podemos escribir las raíces como:

$$z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 1 + i} = -1 \pm \sqrt{+i}.$$

Para determinar el valor de $\sqrt{i}$ tenemos que encontrar $w_{1,2}$ tal que

$$w^2 = i.$$

Llamando $w = x + y\,i$, el sistema a considerar en este caso es:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 - y^2 &= 0 \\ 2xy &= 1. \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones, obtenemos:

$$2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Cuando $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, la tercera ecuación da $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y cuando $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, la tercera ecuación da $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Entonces $w_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ y

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \qquad z_2 = -\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

3.6 El Teorema de De Moivre

Teorema: Si θ es un ángulo arbitrario, entonces

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración:

1. Para $n > 0$ probamos por inducción.
   (a) La afirmación es verdadera para $n = 1$ pues $\left(e^{i\theta}\right)^1 = e^{i\theta} = e^{i\,1\,\theta}$.
   (b) Suponemos que la afirmación es verdadera para $n = 1$ (es decir, que se verifica la igualdad $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$) y probamos para $n + 1$:

$$\begin{aligned} \left(e^{i\theta}\right)^{n+1} &= \left(e^{i\theta}\right)^n \cdot \left(e^{i\theta}\right)^1 \\ &= e^{in\theta} \cdot e^{i\theta} \\ &= e^{i(n+1)\theta}. \end{aligned}$$

2. Para $n < 0$. Notemos que si n es un número negativo, podemos escribirlo como $n = -m$, con $m > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \left(e^{i\theta}\right)^n &= \left[\left(e^{i\theta}\right)^{-1}\right]^m \\ &= \left[e^{-i\theta}\right]^m = e^{i(-m)\theta} \\ &= e^{in\theta}. \ \diamondsuit \end{aligned}$$

Si conocemos el argumento de un número complejo podemos usar el teorema anterior para elevar este número a potencias altas y para resolver ecuaciones de grado $n > 2$ del tipo:

$$z^n = a + b\,i\,.$$

EJEMPLOS

1. Calcule $(-1 + \sqrt{3}i)^3$.

   Solución:

   Escribimos primero la base en forma polar. O sea, calculamos el módulo $|-1 + \sqrt{3}i| = 2$, y encontramos el argumento θ que satisface $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, o sea $\theta = \frac{2}{3}\pi$. Entonces, usando el teorema de De Moivre, obtenemos:

$$(-1 + \sqrt{3}i)^3 = (2e^{i\frac{2}{3}\pi})^3 = 2^3 e^{i2\pi} = 8.$$

2. Calcule las raíces terceras de la unidad, o sea, las soluciones de la ecuación $z^3 = 1$.

   Solución:

   Escribimos a z y al número 1 en forma polar, o sea

$$z = re^{i\theta} \qquad \text{y} \qquad 1 = e^{i0}$$

para $0 \leq \theta < 2\pi$. Entonces la ecuación original se puede escribir:

$$r^3 \mathrm{e}^{i3\theta} = \mathrm{e}^{i0}.$$

Por otro lado, dos números escritos en forma polar son iguales si y sólo si sus módulos son iguales y sus argumentos difieren en un múltiplo de 2π. Entonces:

$$r = 1 \qquad \text{y} \qquad 3\theta = 0 + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Pero como $0 \leq \theta < 2\pi$, obtenemos los siguientes argumentos: $\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \frac{2}{3}\pi$ y $\theta_3 = \frac{4}{3}\pi$.

Entonces $z_1 = 1, z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $z_3 == -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3.7 Teorema fundamental del álgebra

Como hemos visto, el teorema de De Moivre nos permite, en ciertos casos muy particulares, encontrar raíces de polinomios de grado mayor que dos. En general este es un problema muy difícil y muchas veces debemos conformarnos con saber que la solución existe. El siguiente teorema (cuya demostración requiere mayores conocimientos que los aportados por este curso), nos ayudará en la resolución de algunas ecuaciones.

Teorema Fundamental del álgebra: Cada polinomio de grado positivo con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja. O sea que

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0 \qquad a_i \quad \text{complejos}$$

se puede escribir como

$$p_n(z) = (z - z_1)p_{n-1}(z).$$

Como consecuencia de este teorema tenemos los siguientes resultados:

(a) Cada polinomio con coeficientes complejos puede escribirse como:

$$p_n(z) = z_0(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)\,,$$

con $z_0 \neq 0$, z_i complejos llamados las **raíces** de $p_n(z)$.

(b) Cada polinomio de grado positivo y coeficientes reales puede ser factorizado como el producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles. (Un polinomio real de grado dos se dice irreducible si posee raíces no reales).

La demostración del punto (a) es una consecuencia directa del teorema arriba enunciado, por lo que dmostraremos solo la parte (b).

Demostración:

Sabemos por (a) que:

$$p_n(z) = z_0(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n).$$

Supongamos que z_1 no es real, entonces:

$$\begin{aligned} p_n(z_1) &= a_n z_1^n + a_{n-1} z_1^{n-1} + ... + a_0 = 0 \\ \overline{p_n(z_1)} &= a_n \bar{z}_1^n + a_{n-1} \bar{z}_1^{n-1} + ... + a_0 = 0, \end{aligned}$$

puesto que los a_i son reales. Esto implica que $\bar{z}_1$ es también una raíz. Entonces:

$$\begin{aligned} (z - z_1)(z - \bar{z}_1) &= z^2 - z\bar{z}_1 - z_1 z + z_1 \bar{z}_1 \\ &= z^2 - z(\bar{z}_1 + z_1) + |z_1|^2 \end{aligned}$$

es un polinomio irreducible. Esto demuestra el punto (b).

EJEMPLOS

1. Resuelva la ecuación $z^2 - z + (1 - i) = 0$.

   Solución:

   Tenemos una ecuación cuadrática con coeficientes complejos. Las soluciones son:

   $$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (1 - i)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4} + i}\,.$$

   Para determinar $\sqrt{-\frac{3}{4} + i}$ tomamos

   $$u^2 = -\frac{3}{4} + i\,.$$

   Esta es una ecuación del tipo que vimos anteriormente y que ya sabemos cómo resolver. Si $u = x+y\,i$ entonces debemos resolver sl siguiente sistema de ecuaciones:

   $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{5}{4} \\ x^2 - y^2 &= -\frac{3}{4} \\ 2xy &= 1\,. \end{aligned}$$

   Sumando las dos primeras ecuaciones resulta:

   $$2x^2 = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\frac{1}{2}$$

   Usando la tercera ecuación del sistema resulta $y = 1$ si $x = \frac{1}{2}$, e $y = -1$ si $x = -\frac{1}{2}$. De manera que tenemos dos posibles valores para u:

   $$u = \frac{1}{2} + i \qquad \text{ó} \qquad u = -\frac{1}{2} - i\,.$$

   Entonces las soluciones de la ecuación original son:

   $$z_1 = 1 + i \qquad \text{y} \qquad z_2 = -i\,.$$

2. Resuelva la ecuación $p(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$.

   Solución:

   En este caso se nos presenta una ecuación de tercer grado con coeficientes reales. Es fácil darse cuenta de que $z_1 = 1$ es una raíz, ya que 1 verifica la ecuación:

$$1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 0\,.$$

   Según el teorema fundamental del álgebra, si $z_1 = 1$ es una una raíz de $p(z) = 0$, podemos dividir el polinomio por $z - z_1 = z - 1$ y obtener un polinomio de segundo grado.

   Dejamos que el lector verifique que $\dfrac{z^3 - 3z^2 + 4z - 2}{z - 1} = z^2 - 2z + 2$.

   Ahora podemos expresar la ecuación original en forma factorizada:

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = (z - 1)(z^2 - 2z + 2) = 0\,.$$

   Sabemos que el producto de dos factores es 0 si uno de ellos lo es, por lo que nos queda por resolver la ecuación $z^2 - 2z + 2 = 0$. Usando la fórmula cuadrática obtenemos $z_{2,3} = 1 \pm \sqrt{-1}$.

   Si llamamos u_1 y u_2 a las soluciones de $u^2 = -1$, entonces $u_{1,2} = \pm i$. Con esto resulta $z_{2,3} = 1 \mp i$.

   Las soluciones de la ecuación original son:

$$z_1 = 1\,, \qquad z_2 = 1 - i\,, \qquad z_3 = 1 + i\,.$$

3. Sabiendo que la ecuación $z^4 + 3z^2 - 6z + 10 = 0$ tiene como raíz a $z_1 = -1 + 2\,i$, calcule las demás raíces.

   Solución:

   Como los coeficientes son reales, el teorema fundamental del álgebra dice que si z_1 es una raíz, entonces $\overline{z_1} = -1 - 2\,i$ también lo es. Entonces, ya tenemos determinadas dos de las raíces: $z_1 = -1 + 2\,i$ y $z_2 = -1 - 2\,i$.

   Dividimos el polinomio $z^4 + 3z^2 - 6z + 10$ por $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + 2z + 5$. El resultado es $z^2 - 2z + 2$, con lo que tenemos:

$$z^4 + 3z^2 - 6z + 10 = (z - z_1)(z - z_2)(z^2 - 2z + 2) = 0\,.$$

   Igual que en los ejemplos anteriores debemos resolver una ecuación de segundo grado con coeficientes reales, en este caso:

$$z^2 - 2z + 2 = 0\,.$$

   Dejamos como ejercicio para el lector verificar que las soluciones de esta ecuación son $z_3 = 1 + i$ y $z_4 = 1 - i$.

   Las raíces de la ecuación $z^4 + 3z^2 - 6z + 10 = 0$ son:

$$z_1 = -1 + 2\,i\,, \qquad z_2 = -1 - 2\,i\,, \qquad z_3 = 1 + i\,, \qquad z_4 = 1 - i\,.$$

Capítulo 4

Ejercicios

4.1 Matrices y Determinante

1. Para qué valores de a en $\mathbf{R}$ tiene el sistema una única, ninguna o infinitas soluciones

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + ax_2 - x_3 + x_4 &= 2. \end{aligned}$$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\text{(a) } X + A = 3X + 2B, \qquad \text{(b) } 4X + 3Y = A \text{ y } 2X + Y = B,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calcule los determinantes de las siguientes matrices:

$$\text{(a) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{(b) } \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{pmatrix}, \quad \text{(c) } \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\text{(d) } \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(e) } \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(f) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Evalúe los determinantes de las siguientes matrices reduciéndolas a una matriz triangular superior.

$$\text{(a) } \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(b) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Evalúe los determinantes de las siguientes matrices por inspección (o sea aplicando las reglas del cálculo de determinante).

$$\text{(a) } \begin{pmatrix} a & b & c \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \end{pmatrix}, \quad \text{(b) } \begin{pmatrix} a & b & c \\ a+b & 2b & c+b \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

6. (a) Encuentre el det (A) si A es 3×3 y $\det(2A) = 6$.
   (b) ¿Bajo que condiciones es $\det(-A)=$ det (A)?

7. Use el determinante para encontrar para qué valores de c las siguientes matrices son invertibles.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 0 & c & -c \\ -1 & 2 & -1 \\ c & -c & c \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 4 & c & 3 \\ c & 2 & c \\ 5 & c & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & c & -1 \\ c & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

8. Sean A, B y C tres matrices $n \times n$ y asuma que det (A)=-1, det (B)= 2 y det (C)= 3. Evalúe
   (a) $\det(A^2BC^TB^{-1})$
   (b) $\det(B^2C^{-1}AB^{-1}C^T)$

9. Sean A y B dos matrices 2×2 que satisfacen

$$A^2B = 3I \qquad \text{y} \qquad A^TB^3 = -I,$$

   donde I es la matriz identidad. Calcule det (A).

10. Si

$$\begin{vmatrix} \text{a} & \text{b} & \text{c} \\ \text{p} & \text{q} & \text{r} \\ \text{x} & \text{y} & \text{z} \end{vmatrix} = -1,$$

   calcule

$$\begin{vmatrix} \text{-2a} & \text{-2b} & \text{-2c} \\ \text{2p+x} & \text{2q+y} & \text{2r+z} \\ \text{3x} & \text{3y} & \text{3z} \end{vmatrix}$$

11. Demuestre que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \text{x} & \text{x} \\ 1 & \text{x} & 0 & \text{x} \\ 1 & \text{x} & \text{x} & 0 \end{vmatrix} = -3x^2$$

12. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Suponiendo que $\det(A) = -7$ determine:
   (a) $\det(3A)$ (c)$\det(2A^{-1})$
   (b) $\det(A^{-1})$ (d)$\det((2A)^{-1})$

13. Sin evaluar directamente demuestre que $x = 0$ y $x = 2$ satisfacen

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

14. Diga para qué valor(es) de k la matriz dada no es invertible:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

15. Exprese los siguientes sistemas lineales en la forma $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\text{(a)} \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 &=& \lambda x_1 \\ 2x_1 + x_2 &=& \lambda x_2 \end{array} \qquad \text{(b)} \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 &=& \lambda x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 &=& \lambda x_2 \end{array} \qquad \text{(c)} \begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 &=& \lambda x_1 \\ -5x_1 - 3x_2 &=& \lambda x_2 \end{array}$$

16. Para cada uno de los sistemas del ejercicio anterior, encuentre:
   (a) la ecuación característica,
   (b) los autovalores, y
   (c) los autovectores correspondientes a cada uno de los autovalores.

4.2 Vectores en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$

1. Sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbf{R}^2$ tal que $\|\mathbf{v}\| = 3$ y forme un ángulo de $5\pi/6$ con el eje de las x. Calcule las componentes de $\mathbf{v}$.

2. Sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbf{R}^3$ tal que $\|\mathbf{v}\| = 2$, y forma un ángulo de $\pi/3$ con el eje de las z y la proyección de $\mathbf{v}$ sobre el plano xy forma un ángulo de $\pi/4$ con el eje de las x. Calcule las componentes de $\mathbf{v}$.

3. Sea $\mathbf{u} = (-3, 3, 2), \mathbf{v} = (4, 2, 7)$ y $\mathbf{w} = (2, -1, -4)$. Encuentre el vector $\mathbf{x} = (x, y, z)$ que satisface
$$3\mathbf{u} - \mathbf{v} + 2\mathbf{x} = 6\mathbf{x} + 3\mathbf{w}.$$

4. Encontrar las coordenadas del punto final Q del vector $\mathbf{u}$ cuyo punto inicial es $P(-1, 3, -5)$.
   (a) Donde $\mathbf{u}$ es un vector en la dirección de $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$ y cuyo largo es el doble del largo de $\mathbf{v}$.
   (b) Donde $\mathbf{u}$ es un vector en la dirección de $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$ y cuyo largo es es la mitad del largo de $\mathbf{v}$.

5. Encontrar las coordenadas del punto inicial P del vector $\mathbf{u}$ cuyo punto final es $Q(3, 0, -5)$.
   (a) Donde $\mathbf{u}$ es un vector en la dirección de $\mathbf{v} = (4, -2, -1)$ y cuyo largo es el doble del largo de $\mathbf{v}$.
   (b) Donde $\mathbf{u}$ es un vector en la dirección de $\mathbf{v} = (4, -2, -1)$ y cuyo largo es es la mitad del largo de $\mathbf{v}$.

6. Sea $\mathbf{v} = (-1, 1, 1)$. Encuentre todos los escalares k tal que
$$\|k\mathbf{v}\| = 3.$$

7. Usando la propiedad de que $\|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$. Calcule $\|\mathbf{u}\|$, si
$$\text{(a) } \mathbf{u} = (108, 126), \qquad \text{(b) } \mathbf{u} = (-200, -60)$$

8. Sean $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 8$, $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \sqrt{3}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}$ y $\|\mathbf{u}\| = 2$. Calcule:
$$\text{(a) } (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{v}) \qquad \text{(b) } (2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}) \cdot (4\mathbf{w} - \mathbf{v}), \qquad \text{(c) } \|-5\mathbf{u}\|, \qquad \text{(d) } \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

9. Considere los vectores $\mathbf{u} = (-3, 3, 2), \mathbf{v} = (4, 2, 7)$ y $\mathbf{w} = (2, -1, -4)$. Calcule $\mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{z_1} = \text{proy}_{\mathbf{w}}\mathbf{z}$.

10. Sea $\mathbf{u} = (\sqrt{3}, 1)$. Si $\|\mathbf{v}\| = 2$ y el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\pi/6$, encuentre las componentes de $\mathbf{v}$.

4.3 Planos y rectas

1. Encuentre la ecuación de cada uno de los siguientes planos.
   (a) Que contiene a $P(3, 0, -1)$ y a la recta $(x, y, z) = (0, 0, 2) + t(1, 0, 1)$.
   (b) Que contiene a $P(2, 1, 0)$ y a la recta $(x, y, z) = (3, -1, 2) + t(1, 0, -1)$.
   (c) Que contiene a las rectas $(x, y, z) = (1, -1, 2) + t(1, 0, 1)$ y $(x, y, z) = (0, 0, 2) + t(1, -1, 0)$.
   (d) Que contiene a las rectas $(x, y, z) = (3, 1, 0) + t(1, -1, 3)$ y $(x, y, z) = (0, -2, 5) + t(2, 1, -1)$.
   (e) En que cada punto es equidistante a los puntos $P(2, -1, 3)$ y $Q(1, 1, -1)$
   (f) En que cada punto es equidistante a los puntos $P(0, 1, -1)$ y $Q(2, -1, -3)$

2. En cada uno de los siguientes casos, halle la ecuación de la recta.
   (a) Que pase por el punto $P(3, -1, 4)$ y sea perpendicular al plano $3x - 2y - z = 0$.
   (b) Que pase por el punto $P(2, -1, 3)$ y sea perpendicular al plano $2x + y = 1$.

3. En cada caso encuentre la distancia más corta del punto P al plano y encuentre el punto Q en el plano mas cercano a P.
   (a) $P(2,3,0)$; el plano tiene la ecuación $5x - y + z = 1$
   (b) $P(3,1,-1)$; el plano tiene la ecuación $2x + y - z = 6$

4. Encuentre la distancia más corta entre los siguientes pares de rectas paralelas.
   (a) $(x,y,z) = (2,-1,3) + t(1,-1,4)$
   $(x,y,z) = (1,0,1) + s(1,-1,4)$
   (b) $(x,y,z) = (3,0,2) + t(3,1,0)$
   $(x,y,z) = (-1,2,2) + t(3,1,0)$

5. Encuentre la distancia más corta y los puntos más cercanos entre los siguientes pares de rectas no paralelas.
   (a) $(x,y,z) = (1,-1,0) + t(1,1,1)$
   $(x,y,z) = (2,-1,3) + t(3,1,0)$
   (b) $(x,y,z) = (1,2,3) + s(2,0,-1)$
   $(x,y,z) = (3,-1,0) + t(1,1,0)$.

6. Considere los puntos $A(3,1,2)$ y $B(-1,2,3)$ y determine todos los puntos P sobre la recta

$$(x,y,z) = (2,1,2) + t(1,1,1)$$

tal que el triángulo ABP sea recto.

4.4 Inducción matemática

1. Demuestre por inducción las siguientes igualdades:
   (a) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$
   (b) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$
   (c) $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}$
   (d) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
   (e) $\sum_{i=1}^{n} c\, a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$
   (f) $\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$

2. Pruebe las siguientes propiedades para todo par de números naturales n y m:
   (a) $x^n.x^m = x^{n+m}$
   (b) $(x^n)^m = x^{n.m}$

3. Demuestre que las siguientes fórmulas son verdaderas para todo natural $n \geq 1$:
   (a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$
   (b) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
   (c) $\sum_{i=1}^{n} i\, 2^{i-1} = 1 + (n-1)2^n$
   (d) $\sum_{i=1}^{n} i^2 2^n = 2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6$

4. Demuestre la fórmula de la progresión aritmética:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a + i\, d) = \frac{n\,(2a + (n-1)d)}{2}$$

5. Demuestre la fórmula de la progresión geométrica:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a\, d^i = a\, \frac{d^n - 1}{d - 1}$$

6. Demuestre por inducción que las siguientes afirmaciones son válidas para todo natural $n \geq 1$:

   (a) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2$
   (b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$
   (c) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$
   (d) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$
   (e) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \ldots + n(n+1)^2 = \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+5)$
   (f) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$
   (g) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n}{3}(4n^2 - 1)$
   (h) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$
   (i) $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n}$
   (j) $n < 2^n$
   (k) $5^n + 3$ es múltiplo de 4
   (l) $n^3 - n$ es múltiplo de 3

7. Considere la suma $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\, i! = (n+1)! - 1$. Demuestre que esta fórmula es válida $\forall n \geq 1$.

8. Pruebe las siguientes afirmaciones para n natural:

   (a) $2n \geq n + 1 \quad \forall\, n$
   (b) $n^2 + n$ es par $\forall\, n$
   (c) $4n \geq n + 4 \quad \forall\, n \geq 2$
   (d) $2^n \geq n^2 \quad \forall\, n \geq 4$
   (e) $n^3 \geq 3n + 3 \quad \forall\, n \geq 3$
   (f) $n^3 \leq 3^n \quad \forall\, n$
   (g) $6^n \geq 1 + 4^n \quad \forall\, n$ ¿Vale con $>$?
   (h) $3^n \geq 1 + 2^n \quad \forall\, n$

9. Demuestre las siguientes afirmaciones para n natural:

   (a) $n! + (n+1)! = n!\,(n+2) \quad \forall\, n$
   (b) $(n+1)! - n! = n!\, n \quad \forall\, n$
   (c) $n! \leq n^n \quad \forall\, n$
   (d) $n^2 \leq n! \quad \forall\, n \geq 4$

10. Considere una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ de números que satisface:

   (a) $a_1 = 2$
   (b) $a_{n+1} = 2\, a_n$ para todo $n \geq 1$

   Encuentre una expresión para a_n en términos de n y demuestre el resultado por inducción.

11. Pruebe las siguientes desigualdades para n natural:

   (a) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n > 2 \quad \forall\, n > 1$
   (b) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \dfrac{1}{j!} \quad \forall\, n > 1$
   (c) $2^{n-1} < n! \quad \forall\, n > 2$
   (d) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3 \quad \forall\, n$

   Ayuda: Para los dos primeros apartados use la fórmula del binomio; para el último, use los dos primeros.

4.5 Números Complejos

1. Escriba cada una de las siguientes expresiones en la forma $a+ib$.
   (a) $(2-3i)-2(2-3i)+9$
   (b) $(3-2i)(1+i)+|3+4i|$
   (c) $\dfrac{1+i}{2-3i}+\dfrac{1-i}{-2+3i}$
   (d) $\dfrac{3-2i}{1-i}-\dfrac{3-7i}{2-3i}$
   (e) i^{131}
   (f) $(1+i)^4$
   (g) $(2-i)^2$
   (h) $(1-i)^2(2+i)^2$
   (i) Calcule el siguiente cociente y expréselo en la forma $a+ib$:
   $$\frac{z+\bar{z}w-\bar{w}}{\bar{z}z+w},$$
   si $z=2+i$ y $w=3-i$.

2. En cada caso encuentre el número complejo z que satisface:
   (a) $iz-(1+i)^2=3-i$
   (b) $(i+z)-3i(2-z)=iz+1$
   (c) $z^2=-i$
   (d) $z^2=3-4i$
   (e) $z(1+i)=\bar{z}+(3+2i)$.

3. Sean $Re(z)$ la parte real e $Im(z)$ la parte imaginaria de z. Demuestre que:
   (a) $Im(z\,i)=Re(z)$.
   (b) $z+\bar{z}=2Re(z)$
   (c) $Im(z)=-Re(z\,i)$
   (d) $Im(z+w)=Im(z)+Im(w)$

4. Pruebe que
   (a) $|w+z|^2=|w|^2+|z|^2+w\bar{z}+\bar{w}z$ para todo z y w.
   (b) $(1+i)^7+(1-i)^7$ es real.

5. Escriba en forma polar los siguientes números
   (a) $3-3i$
   (b) $-\sqrt{3}+i$
   (c) $-7i$
   (d) $-4i$

6. Exprese los siguientes números en la forma $a+ib$
   (a) $3e^{\pi i}$
   (b) $e^{5\pi i/4}$
   (c) $e^{7\pi i/3}$

7. Encuentre las raíces de las siguientes ecuaciones
   (a) $z^2+2z+(1+i)=0$
   (b) $z^2-z+(1-i)=0$
   (c) $z^2+(3-2i)z-6i=0$
   (d) $z^2-4iz-4-2i=0$
   (e) $z^2-3(1-i)z-5i=0$

4.5.1 Teorema de De Moivre y polinomios de grado $n > 2$

1. Exprese los siguientes números en la forma $a + ib$
   (a) $(-1+\sqrt{3}i)^2$
   (b) $(1-i)^6(\sqrt{3}+i)^3$
   (c) $(1+\sqrt{3}i)^{-4}$
   (d) $(1-i)^{10}$
   (e) $(\sqrt{3}-i)^9(2-2i)^5$.
2. Utilize el teorema de De Moivre para demostrar que
   (a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$
   (b) $\operatorname{sen} 2\theta = 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta$
3. (a) Encuentre las raíces cuartas de la unidad.
   (b) Encuentre las raíces sextas de la unidad.
4. Encuentre los z que satisfacen
   (a) $z^3 = 8$
   (b) $z^6 = -64$
   (c) $z^3 = -27i$
   (d) $z^4 = 2(\sqrt{3}i - 1)$.
5. Resuelva la ecuación
   $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$
6. La ecuación
   $z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 24z + 10 = 0$
   tiene una raíz igual a $1 - 2i$. Calcule todas las raíces de la ecuación.
7. La ecuación
   $z^4 + 3z^2 - 6z + 10 = 0$
   tiene una raíz igual a $-1 + 2i$. Calcule todas las raíces de la ecuación.
8. La ecuación
   $z^4 + 3z^3 + z^2 + 18z - 30 = 0$
   tiene una raíz puramente imaginaria. Calcule todas las raíces de la ecuación.
9. Encuentre a, b (reales) tales que
   $$z^3 + az + b = 0$$
   tenga a $1 - 2i$ como raíz .
10. La ecuación
    $$z^3 - (6-i)z^2 + (9-5i)z - 1 + 9i = 0$$
    tiene una solución $z = -i$. Determine las otras soluciones.
11. Resuelva la ecuación
    $$z^3 + (-2+i)z^2 - (3+2i)z - 3i = 0$$
    sabiendo que tiene una raíz estrictamente imaginaria.
12. Demuestre que el polinomio
    $z^{77} + z^7 + 1$
    debe ser divisible por el polinomio $z^2 + z + 1$.

Capítulo 5

Laboratorio de Maple

5.1 Introducción y objetivos

En este laboratorio vamos a familiarizarnos con los comandos y estructuras que Maple posee para trabajar con matrices y resolver sistemas de ecuaciones.

Antes de realizar la tarea establecida para el laboratorio el alumno deberá leer la introducción, los ejemplos, contestar las preguntas y resolver a mano los ejercicios que acompañan esta guía.

5.1.1 Matrices y vectores

Para trabajar con álgebra lineal debemos comenzar cargando el paquete "linalg" con el comando `with(linalg):`.

Un vector se define de la siguiente manera:

```
> with(linalg):
> v :=vector([1,5,6,7,8]);
```

$$v := [\,1\,5\,6\,7\,8\,]$$

Una matriz se puede definir de diferentes formas. Una de ellas es la siguiente:

```
> A:=matrix(2,3,[1,3,4,5,3,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso los dos primeros argumentos del comando `matrix` corresponden a la dimensión de la matriz. Si la matriz es de mayor tamaño, es más cómodo definirla como:

```
> B:=matrix([ [1,5,7,8], [3,6,8,9], [4,6,7,9]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Cada nuevo renglón es obtenido apretando las teclas <`Shift`> - <`Return`> (X-windows o PC-windows) o <`Return`> (Macintosh).

Si queremos definir una matriz cuyos elementos sean todos iguales, por ejemplo $F = (f_{ij})$, donde $f_{ij} = 3$, escribimos:

```
> F:=matrix(2,4,3);
```

$$F := \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

La matriz identidad 4×4 puede definirse de la siguiente manera:

```
> I4:=matrix(4,4,proc(i,j) if i=j then 1 else 0 fi; end);
```

$$I4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El elemento $(2,1)$ de la matriz A puede ser obtenido escribiendo:

```
> A[2,1];
```

$$5$$

5.1.2 Estructuras de Maple

Las estructuras de Maple son:

`sequence`	sucesión	$1,4,3$
`list`	lista	$[1,4,3]$
`set`	conjunto	$\{1,4,3\}$
`table`	tabla	table([a=1,c=2])
`array`	matriz, vector	[1 4 3]

Una "sucesión" es un conjunto de objetos seguidos de comas. El comando `seq` sirve para crear una sucesión:

```
> s:=seq(i,i=1..3);
```

$$s := 1,2,3$$

Una "lista" es una sucesión acotada por corchetes:

```
> l:=[1,5,7];
```

$$l := [1,5,7]$$

Un "conjunto" se define como una lista pero usando llaves:

```
> m:={1,4,5};
```

$$m := \{1,4,5\}$$

Se puede acceder a un elemento de la estructura (por ejemplo, "lista") de la siguiente manera:

```
> l[3];
```

$$7$$

5.2 Ejemplo

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 3x_3 &= \ \ 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= -\ 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= \ \ 1 \end{aligned}$$

Solución:

Primero resolveremos el problema haciendo reducción por filas y luego automáticamente usando distintos comandos.

```
> with(linalg):  # cargamos el paquete para trabajar con álgebra lineal.
```

Consideramos el sistema como la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y cargamos la matriz en la variable A

```
> A:=matrix([
>       [3, −1, 3],
>       [1, 1, 2],
>       [−1, 3, 4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Cargamos a $\mathbf{b}$ en la memoria como una matriz de dimensión 3×1

```
> b:=matrix(3, 1, [1, −1 ,1]);
```

$$b := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Formamos la matriz ampliada $(A|\mathbf{b})$

```
> A_b:=augment(A, b);
```

$$A\_b := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

y hacemos reducción manual con los siguientes comandos:

```
> A1:=swaprow(A_b, 1, 2);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> A2:=addrow(A1, 1, 2, −3);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

> A3:=addrow(A2, 1, 3, 1);

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

> A4:=addrow(A3, 2, 3, 1);

$$A4 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

> A5:=mulrow(A4, 2, $-1/4$);

$$A5 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

> R:=mulrow(A5, 3, 1/3);

$$R := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

> x:=vector([0, 0, 0]); # definimos el vector x

$$x := [0\,0\,0]$$

> x[3]:=4/3;

$$x_3 := \frac{4}{3}$$

> x[2]:=$-1-3/4*$x[3];

$$x_2 := -2$$

> x[1]:=$-1-$x[2]$-2*$x[3];

$$x_1 := \frac{-5}{3}$$

Controlamos el resultado multiplicando las matrices A y $\mathbf{x}$ con la ayuda del operador & * y el comando `evalm` (evalúa la matriz).

> evalm(A&*x);

$$[1\ -1\,1]$$

Podemos resolver el mismo sistema usando los comandos `gausselim` y `backsub`

> G:=gausselim(A_b);

$$G := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

> `X:=backsub(G);`

$$X := \begin{bmatrix} \frac{-5}{3} & -2 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

o con el comando `gaussjord`

> `gaussjord(A_b);`

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

La inversa y el determinante de una matriz se obtienen con los comandos

> `det(A);`

$$12$$

> `Ainv:=inverse(A);`

$$Ainv := \begin{bmatrix} \frac{-1}{6} & \frac{13}{12} & \frac{-5}{12} \\ \frac{-1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Calculamos la solución $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

> `x:=evalm(Ainv&*b);`

$$x := \begin{bmatrix} \frac{-5}{3} \\ -2 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

5.3 Tarea de Laboratorio

Usando el programa Maple, resuelva el sistema que resolvió a mano:

$$\begin{aligned} -3x_1 - 2x_2 + 8x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Hágalo usando reducción por filas y controlando, y luego usando los comandos `gaussselim`, `backsub` y `guassjord`, en la misma forma que se muestra en el Ejemplo.

Bibliografía

- Howard Anton, *Introducción al Álgebra Lineal* 2^{da} Edición; Ed. Limusa, Grupo Noriega Editores, México, 1998.
- W. Keith Nicholson, *Linear Algebra with Applications* 3^{rd} Edition; PWS Publishing Company, Boston.