CUADERNILLO DE ANÁLISIS DE UNA VARIABLE

M. S. Iriondo, P. G. Bercoff, S. Smith

Instituto Universitario Aeronáutico — Año 2001

Contenidos

Capítulo 1

Números reales

1.1 Valor absoluto, ecuaciones e inecuaciones

1. Exprese el subconjunto de los números reales que satisfacen las siguientes condiciones como un intervalo o como unión de intervalos.

   (a) $x \geq 0$ y $x \leq 5$ (b) $x \neq -1$ (c) $x < 2$ y $x \geq -3$

2. Sabiendo que
$$\mathrm{e} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$$
   Diga cuantos términos de la suma son sufiecientes para que $\mathrm{e} \approx 2.718$.

3. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   (a) $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - \dfrac{1}{x} = x + 12$

   (b) $\dfrac{x}{\frac{4}{3} - x} - \dfrac{\frac{1}{3} - x}{x} = \dfrac{1}{9x}$

   (c) $(x+1)^2 = 4(x+1) - 4$

   (d) $x^4 - 36x^2 = 0$

   (e) $\dfrac{2x+3}{2x-3} - \dfrac{2x-3}{2x+3} = \dfrac{8}{3}$

   (f) $\sqrt{4 - x^2} = -x$

   (g) $3 - \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}$

   (h) $\sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+1} + 2 = 0$

4. Resuelva las siguientes inecuaciones:

   (a) $3(2-x) < 2(3+x)$

   (b) $\dfrac{1}{2-x} < 3$

   (c) $\dfrac{3}{x-1} < \dfrac{2}{x+1}$

   (d) $\dfrac{x}{2} \geq 1 + \dfrac{4}{x}$

5. Resuelva:

   (a) $|2t+5| = 4$

   (b) $|x-1| = 1 - x$

   (c) $|x+1| > |x-3|$

   (d) $|x-3| < 2|x|$

   (e) $2|x+1| + |x| + |x-1| \leq 4$

   (f) $|x-1| > 2|x-2|$

1.2 Sistema cartesiano en el plano

6. Encuentre el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

(a) $x^2 - 6x + y^2 - 4y = -9$ (b) $x^2 + 8x + y^2 = -12$

7. Encuentre la ecuación de la recta

(a) $y = mx + 1$ que pasa por el punto $(1, 0)$

(b) $y = 3x + b$ que pasa por el punto $(1, 4)$

8. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 1)$ y es paralela a la recta $y = 3x + 5$.

9. Dibuje las curvas determinadas por las ecuaciones:

(a) $y = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$

(b) $y = x^2 - 8x + 4$

(c) $v = -u^2 + 2u - 7$

(d) $y = |x - 1|$

(e) $y = |x + 1| - |x - 1|$

(f) $y = \operatorname{sgn}(1 - x^2)$

(g) $y = |x^2 + x - 1|$

(h) $\dfrac{x^2}{4} + 2y^2 = 1$

(i) $x^2 - 3x = -y^2 + 4y + 9$

(j) $x^2 - y^2 = 2$

10. Considere la familia de curvas

$$y_k = 2x - 3 + k(x - 2)^2, \qquad k \in [-2, 2].$$

Dibuje algunas curvas en una misma gráfica para algunos valores de k, por ejemplo $k = -2, 0, 2$. ¿Para cuál o cuáles valores de k la curva cambia cualitativamente?

11. ¿Para cuáles valores de x se satisface la desigualdad $x^2 + 5x + 4 \geq 0$?

12. Describa la curva o la región del plano determinada por las siguientes ecuaciones o inecuaciones:

(a) $\dfrac{x^2}{2} + y^2 \geq 1$

(b) $x^2 + y^2 \leq 1$

(c) $x + y > 1$

(d) $x^2 + y^2 - 4x + 2y > 4$

(e) $\dfrac{x^2}{4} - y^2 \geq 1$

(f) $y > -\dfrac{8}{5}x + 5$

(g) $x \leq 1 - y^2$

(h) $x = -\dfrac{y^2}{4}$

(i) $y \geq x^2 - 2x + 2$

1.3 Suma aritmética y geométrica. Fórmula binomial

13. Efectue en forma directa las siguientes sumas:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{3} k^2 \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{4} (k-2)^2 \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{5} 2(k+1)$$

14. Efectúe la suma $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + 301$

15. ¿Cuál es la suma de todos los números de tres cifras que terminan en 1?

16. Calcule $a.a^2.a^3.a^4 \ldots a^n$, donde $n \in I\!N$.

17. Efectúe las siguientes sumas:

(a) $1 + n + (2n - 1) + (3n - 2) + \ldots + (kn - k + 1) + \ldots + (n^2 - n + 1)$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2}$

18. Efectúe las siguientes sumas:

    (a) $9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \ldots - \frac{1}{3^{101}}$

    (b) $1 - 2 + 4 - 8 + \ldots + (-2)^k + \ldots + 2^{2n}$

    (c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{3+2^k}{2^{k+2}}$

19. Calcule (a) $\binom{10}{5}$ (b) $\binom{100}{5}$ (c) $\binom{100}{95}$

20. Desarrolle $(1-x)^9$.

21. Simplifique la expresión

$$x(1 + (1+x) + (1+x)^2 + \ldots + (1+x)^{n-1} + 1 + (1-x) + (1-x)^2 + \ldots + (1-x)^{n-1})$$

22. (a) Determine el coeficiente de x^3 en $(3x-1)^7$

    (b) Determine el término constante de la expresión $\left(x + \frac{2}{x}\right)^{10}$

23. Demuestre: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

24. Observe que los números en las primeras filas del triángulo de Pascal satisfacen

$$\begin{array}{rcl} 1+1 &=& 2 = 2^1 \\ 1+2+1 &=& 4 = 2^2 \\ 1+3+3+1 &=& 8 = 2^3 \\ 1+4+6+4+1 &=& 16 = 2^4 \end{array} \qquad y \qquad \begin{array}{rcl} 1-1 &=& 0 \\ 1-2+1 &=& 0 \\ 1-3+3-1 &=& 0 \\ 1-4+6-4+1 &=& 0 \end{array}$$

    Demuestre que en general vale

    (a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

    (b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

    Ayuda: Calcule $(1+x)^n$ con la fórmula binomial y evalúe luego en $x = 1$.

Capítulo 2

Funciones

2.1 Propiedades generales

1. Considere un triángulo isósceles cuyos lados iguales valen 10 m.

   (a) Exprese la superficie del triángulo como función de la base.

   (b) Identifique el dominio de la función.

2. Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$. Escriba las siguientes funciones en la forma $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde p y q son polinomios:

   (a) $f(x)+1$

   (b) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   (c) $f(x+1)$

   (d) $f \circ f(x)$

   (e) $f(x+1)(f(x) - 2f(x^2+2x))$

3. Determine el dominio de las siguientes funciones:

   (a) $g(x) = \dfrac{2}{3x-5}$

   (b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

   (c) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

   (d) $g(x) = \dfrac{x^4}{x^2+x-6}$

4. Esboce la gráfica de las siguientes funciones

   (a) $f(x) = |x^2 - 1|$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} |x| & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & x > 2 \end{cases}$

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   (f) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

   (g) $f(x) = -\dfrac{1}{x+2}$

   (h) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$

   (i) $f(x) = \begin{cases} 1 - |x-1| & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x < 0 \text{ ó } x > 2 \end{cases}$

   (j) $h(x) = f(x+1)$, donde $f(x)$ es la función dada en el punto 4i.

5. Determine el dominio, contradominio y trace la gráfica de

   (a) $g(x) = \sqrt{-x}$
   (b) $g(x) = \sqrt{6-2x}$
   (c) $h(x) = |2x-3|$
   (d) $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$
   (e) $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$.

6. Considere las funciones $g(x) = \sqrt{3x}$ y $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ y determine el dominio de

   $(a)\ g(x) + f(x) \qquad (b)\ \dfrac{g(x)}{f(x)}$

7. Determine $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$ y $g \circ f$ si

   (a) $f(x) = x^2 \qquad g(x) = 2^x$
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \qquad g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
   (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \qquad g(x) = x^2 - 4x$

8. Determine el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$, si

   $(a)\ g(x) = \sqrt{3x} \qquad (b)\ f(x) = \sqrt{8-x}.$

9. Diga si las funciones son pares o impares. Indique también el dominio.

   (a) $f(x) = 3x - x^3$
   (b) $f(x) = x + x^2$
   (c) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$
   (d) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

10. Cuando sea posible, calcule la inversa de las siguientes funciones. De no existir la inversa, indíquelo.

    (a) $y = x^2 \qquad x \leq 0$
    (b) $y = \dfrac{2-x}{3+x} \qquad x \neq -3$
    (c) $y = x^2 \qquad -\infty < x < \infty$
    (d) $y = \sqrt{1-x^2} \qquad -1 \leq x < 0$

11. Determine $f(t)$ cuando

    (a) $f(x+1) = x^2 - 3x + 2 \qquad x \in I\!R$
    (b) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} \qquad x \neq 0$
    (c) $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} \qquad x \neq 0$

12. Resuelva la ecuación

    $$\sqrt{6x+1} = -x.$$

    Corrobore gráficamente la o las soluciones.

2.2 Exponencial, logaritmo e hiperbólicas

13. Decida, sin usar calculadora, cual de los siguientes números es el mayor: $\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$ y $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$

14. Simplifique lo máximo posible:

    (a) $\left(\dfrac{\ln 3}{\log_{10} 3}\log_{10} \mathrm{e} \ + \dfrac{1}{\ln 3 \log_{10}\ \mathrm{e}}\right)^3$

    (b) $\dfrac{\ln 8}{\ln 2} + \ln 8 - \ln 2 + \ln \dfrac{1}{4}$

15. Esboce la gráfica de las funciones $f(x) = \ln(x+5)$, $g(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ y $h(x) = \ln|x|$.

16. Esboce, en un mismo gráfico, las funciones

    (a) $f(x) = 2^x$

    (b) $g(x) = \ \mathrm{e}^x$

    (c) $h(x) = 5^x$

    (d) $l(x) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$

17. Resuelva las siguientes ecuaciones:

    (a) $\sqrt{\ \mathrm{e}^x} = \ \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

    (b) $(\sqrt{\ \mathrm{e}\ })^x = \ \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

    (c) $\sinh x = 1$

    (d) $\sqrt{\ln(x^2-1)} = \sqrt{\ln(x+1)+\ln(x-1)}$

    (e) $\ln(x+2)+\ln(x+4) = \ln(2x+5)$

    (f) $\sqrt{\ln x} = \ln\sqrt{x}$

    (g) $\sqrt{x-1} = \sqrt{-x-2}$

    (h) $x^{1-\log_{10} x} = 0.01$

18. Para un diodo semiconductor vale la siguiente relación entre la corriente I y el voltaje U

$$I = I_0\left(\mathrm{e}^{KU} - 1\right), \qquad I_0, K > 0.$$

En una prueba de laboratorio se miden los siguientes valores

I (mA)	U(V)
2.0	0.60
40.0	1.20

donde mA indica miliamperes y V voltios. Use estos datos para saber el voltaje cuando la corriente es de 20 mA.

19. Cuando un volumen de gas se lo mantiene aislado vale la relación entre volumen V y la temperatura absoluta T, medida en Kelvin (K),

$$T = AV^{1-\kappa},$$

donde A y κ son constantes. Cuando se comprimen 30 litros de aire a 15 litros, la temperatura sube de 20°C a 114°C. Determine κ. Entre °C (grados centígrados) y K (grados Kelvin) vale la relación x°C= $(x+273)K$.

20. Considere la función $f(x) = c\ \mathrm{e}^{Kx}$.

    (a) Determine las constantes c y K si sabe que $f(2) = 2$ y $f(3) = 3$.

    (b) Calcule $f(4)$.

    (c) ¿Para qué valores de x vale que $f(x) = 4$?

2.3 Funciones trigonométricas

21. Calcule en forma exacta las expresiones que se dan a continuación:

(a) $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}+\tan\frac{5\pi}{3}$ (b) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{7\pi}{6}+\tan\frac{5\pi}{6}$ (c) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}$

22. Resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 3x$
(b) $\tan 5x = \tan 3x$
(c) $\operatorname{sen} x = \cos 3x$
(d) $\operatorname{sen} x = \sqrt{3}\cos x$

23. Esboce la gráfica de

(a) $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$
(b) $f(x)=\cos 2x$
(c) $f(x)=2\cos\dfrac{x\pi}{2}$
(d) $f(x)=3\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$
(e) $f(x)=1+\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$
(f) $f(x)=x+\operatorname{sen} x$

24. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones

(a) $\operatorname{sen}^2 x+\cos x=\dfrac{5}{4}$
(b) $1+\operatorname{sen} x = 2\cos^2 x$
(c) $\cos x \operatorname{sen} x = 0$
(d) $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x$
(e) $2\cos(2x)+4\operatorname{sen} x = 3$
(f) $\operatorname{sen}(6x)=\dfrac{1}{2}$
(g) $\cos(3x)=\operatorname{sen}(4x)$
(h) $\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$
(i) $\cos\left(5x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$, en el intervalo $0\le x\le\pi$
(j) $\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, en el intervalo $72\pi\le x\le 73\pi$
(k) $\operatorname{sen}\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, en el intervalo $23\le x\le 25$
(l) $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, en el intervalo $-33\le x\le -29$
(m) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, en el intervalo $2.3\le x\le 451.9$
(n) $\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen} x$, en el intervalo $-22\le x\le -19$
(o) $\cos(2x)=\cos^2 x+3\operatorname{sen} x$, en el intervalo $\dfrac{35\pi}{2}\le x\le\dfrac{39\pi}{2}$
(p) $\operatorname{sen}(2x)=\sqrt{2}\cos x$, en el intervalo $-\dfrac{19\pi}{2}\le x\le -\dfrac{15\pi}{2}$

2.4 Inversas de las funciones trigonométricas

25. Calcule en forma exacta:

(a) $\arcsin\dfrac{1}{2}$
(b) $\arccos(-1)$
(c) $\arctan\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$
(d) $\arcsin\dfrac{1}{2}+\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
(e) $\arcsin\dfrac{1}{3}+\arcsin\left(-\dfrac{1}{3}\right)$
(f) $\arcsin\dfrac{1}{2}+\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(g) $\operatorname{sen}\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$

(h) $\arcsin\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}\right)$

(i) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

(j) $\arctan\left(\tan\frac{7\pi}{5}\right)$

(k) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$

(l) $\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{7}{9}\right)$

(m) $\operatorname{sen}\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\left(-\frac{7}{9}\right)\right)$

26. Resuelva las ecuaciones

(a) $\arcsin 2x = \frac{\pi}{2}$

(b) $\arccos 3x = \arctan 2x$

(c) $\arcsin x = 2\arccos x$

(d) $3\arccos x = \arccos 3x$

Capítulo 3

Límite y continuidad

3.1 Límite

1. Considere la sucesión $\{a_n\}_1^\infty$, donde $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

   (a) Determine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

   (b) ¿Cuáles a_n se encuentran a una distancia de $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ mayor que $\epsilon = 0,2$? ¿Y que $\epsilon = 0,1$? ¿Y que $\epsilon = 0,05$?

   (c) Dibuje en la recta numérica los a_n que se encuentran a una distancia mayor que $\epsilon = 0,1$.

2. (a) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ para $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

   (b) Demuestre, usando la definición, que el valor calculado en el apartado anterior es efectivamente el límite de a_n cuando $n \to \infty$.

3. Calcule los límites indicados:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n} \right)$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+(-1)^n n}{2n}$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{3/2}2^n}{3^n}$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+1}$

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$

   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+7n}{n-2}$

   (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+7n}{1-2n^2}$

   (i) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+7} - n)$

4. ¿A qué intervalo debe pertenecer x si $f(x)$ debe estar a una distancia menor que ϵ del número L?

   (a) $f(x) = 2x - 1, \quad \epsilon = 0.02, \quad L = 3$

   (b) $f(x) = x^2, \quad \epsilon = 0.1, \quad L = 4$

5. Usando la definición de límite, demuestre que:

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} (3x+1) = 4$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

6. Calcule los límites indicados:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+1}{x+1}$

(b) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$

(c) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+1}{x+1}$

(d) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$

(e) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+x}{1+3x^2}$

(f) $\lim_{x\to \infty} \frac{x-\ln\sqrt{x}+\operatorname{sen} x}{2x-\sqrt{x}\ln x^3}$

(g) $\lim_{x\to \infty} (1+x^6+x^{12})\, \mathrm{e}^{-x}$

(h) $\lim_{x\to \infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

(i) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

(j) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$

(l) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

(m) $\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x}$

(n) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{x}$

(o) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(p) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^{2x}+(2x)^x}{x^{2x}-(2x)^x}$

(q) $\lim_{n\to \infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$

(r) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+6x)}{x(x-7)}$

3.2 Continuidad

7. Determine -si los hay- los puntos del dominio de $f(x)$ en los que la función es discontinua. ¿Existe el límite por la izquierda y/o derecha?.

(a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

(b) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ x & x \leq 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ x & x \leq 1 \end{cases}$

(e) $f(x) = H(x-1)$, donde $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

8. Investigue para que valores de x están definidas las siguientes funciones. Determine los puntos de discontinuidad.

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$

(b) $h(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{|x|}}$

(c) $h(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

9. (a) Determine la constante c para que $g(x)$ sea continua en $I\!R$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - c & x < 0 \\ cx + 20 & x \geq 4 \end{cases}$$

(b) Grafique $g(x)$.

10. Las siguientes funciones no están definidas para $x = 0$. Defina cada una de ellas para $x = 0$, de manera que resulten continuas en este punto.

    (a) $g(x) = \sqrt[3]{x} \ln x^2$

    (b) $h(x) = (1 + x^2)^{1/x^2}$

    (c) $f(x) = \arctan(\ln |x|)$

    (d) $g(x) = x \ln \dfrac{1}{x^2}$

Capítulo 4

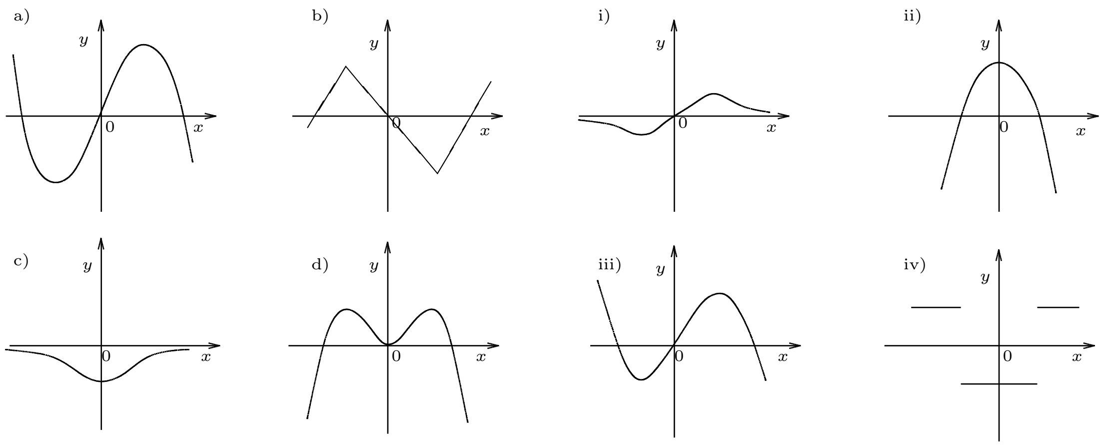
Derivada

4.1 Reglas de derivación

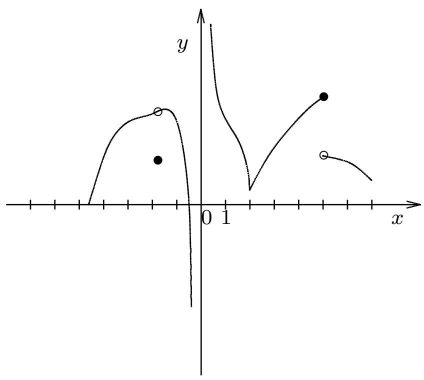
1. Calcule, usando la definición, las derivadas de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = 5x + 3$ (b) $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ (c) $f(x) = \sqrt{6 - x}$

2. Haga corresponder la gráfica de cada función en (a)-(d) con la de su derivada en (i)-(iv). Cite las razones de la correspondencia.



3. La gráfica de la función g es la siguiente:



(a) ¿En qué puntos es g discontinua?

(b) ¿En qué puntos g no es diferenciable?

4. La **derivada a izquierda** y la **derivada a derecha** de f en a se definen, respectivamente, mediante

$$f'^{-}(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad f'^{+}(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

si es que los límites existen. En este caso, $f'(a)$ existe si y sólo si existen ambas derivadas laterales y son iguales.

(a) Determine $f'^{-}(0.6)$ y $f'^{+}(0.6)$ para la función $f(x) = |5x-3|$

(b) Demuestre que no existe $f'(0.6)$

5. (a) Emplee las definiciones del ejercicio 4 para calcular $f'^{-}(4)$ y $f'^{+}(4)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 5-x & 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5-x} & x \ge 4 \end{cases}$$

(b) Trace la gráfica de $f(x)$.

(c) ¿Dónde es discontinua $f(x)$?.

(d) ¿Dónde no es diferenciable $f(x)$?

6. Calcule las derivadas de las siguientes funciones y simplifique lo máximo posible:

(a) $f(x) = x^7 - 5x^3 + 1$

(b) $f(x) = (x^2 - x)^4$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

(f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

(h) $f(x) = (x^2 - x)\ \mathrm{e}^{-x}$

(i) $f(x) = \ln\sqrt{x}$

(j) $f(x) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$

(k) $f(x) = \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(l) $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x^2}$

(m) $f(x) = \ln\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

(n) $f(x) = \arcsin x^2$

(o) $f(x) = \arctan\dfrac{1+x}{1-x} - \arctan x$

(p) $f(x) = x^x$

(q) $f(x) = x^{\tan x}$

(r) $f(x) = \log_x\ \mathrm{e}$

7. Calcule $\dfrac{dy}{\mathrm{d}x}$ si las funciones $y = y(x)$ están definidas por

(a) $y^3 + 3y = x$

(b) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$

(c) $y = 1 + x\ \mathrm{e}^y$

(d) $\sqrt{xy} - 2x = \sqrt{y}$

(e) $2y^2 + \sqrt[3]{xy} = 3x^2 + 17$

(f) $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+2x} = 2x$

8. Sea $y = \sqrt{\ln(1+x^2)+1}$. Calcular $(1+x^2)yy'$ y simplificar la expresión lo máximo posible.

4.2 Derivadas de orden más alto

9. Calcule la derivada segunda de las siguientes expresiones:

(a) $(1+x^2)\arctan x$

(b) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

10. Verifique las siguientes ecuaciones:

(a) $y'' - 2y' + 2y = 0$ si $y = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x$

(b) $2y'^2 = (y-1)y''$ si $y = \dfrac{x-3}{x+4}$

11. Calcule $y''\,\mathrm{e}^y$ y simplifique lo máximo posible: $y = 2\ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$

12. Sea $y = x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{4}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$. Calcule $x^2y'' + xy' - y$ y simplifique lo máximo posible.

13. Encuentre:

(a) $y^{(4)}$ si $y = \mathrm{e}^x \cos x$.

(b) $y^{(20)}$ si $y = x^2\mathrm{e}^{2x}$.

14. Calcule la derivada $n-$ésima de la función $f(x) = x\ln x$

4.3 Gráfica de funciones

15. Encuentre el máximo y el mínimo de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 2x+3$, $x \in [-1,1]$

(b) $f(x) = |x^2 - x - 2|$, $x \in [-3,3]$

(c) $f(x) = \sqrt{5-4x}$, $-1 \le x \le 1$

(d) $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $-3 \le x \le 10$

(e) $f(x) = (x^2 - x - 1)\,\mathrm{e}^x$, $|x| \le 3$

16. Esboce la gráfica de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^2 + 2x$

(b) $f(x) = (x^2-4)^2$

(c) $f(x) = x^3 - 3x - 2$

(d) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$

(e) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

(f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(g) $f(x) = x - 2\arctan x$

(h) $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-2x^2}$ (determine también los puntos de inflexión)

(i) $f(x) = x\ln x$ (determine también los puntos de inflexión)

(j) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$

(k) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+x-2}$

(l) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+4}{2x}$.

(m) $f(x) = \dfrac{x^3-2x}{x^2-3}$

17. Esboce la gráfica de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^{1/x}$ para $x > 0$

(b) $f(x) = \arctan 3x - \arctan x$

(c) $f(x) = 2\arctan\sqrt{x} + \dfrac{2}{x+1}$

(d) $f(x) = x^{1/3} + (x-1)^{2/3}$

18. Encuentre el máximo y el mínimo de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x - x^{2/3}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1} + 3\arctan x$.

19. Determine los intervalos donde la función $f(x) = frac2x1 + x^2$ es monótona.

20. Determine los máximos y mínimos locales de $f(x) = x^2 - |2x - 1|$.

21. Determine la imagen de la función $f(x) = \arctan x + \ln \dfrac{x+1}{x^2+1}$, para $x \geq 0$.

22. Demuestre:

    (a) $x^4 + 1 \geq x^3 + x$ para todo x

    (b) $4x^3 + 2x^2 \leq x^4 + 12x + 9$ para todo x. ¿Para cuáles x vale la igualdad?

    (c) $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$ para todo x

    (d) $\operatorname{sen} x \geq x - \dfrac{x^3}{6}$ para $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

    (e) $\ln \sqrt{x} > \dfrac{x-1}{x+1}$ para $x > 1$

    (f) $x\, e^{1-x} \leq 1$ para todo x.

23. Compruebe la siguiente desigualdad para $x > 0$:
    $4\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1} > \ln(x^2+1)$.

4.4 Aplicaciones

24. Calcule la ecuación de la tangente a la curva $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ en los puntos (-1,0), (2,3) y (3,0).

25. ¿Para qué valores de x son paralelas las tangentes de $y = x^2$ e $y = x^3$?

26. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y = y(x)$ definida por la ecuación

    $$y = 1 + x\, e^y$$

    en el punto $(-1, 0)$.

27. Calcule la normal a la curva $y = x \ln x$ que a su vez sea paralela a la recta $2x - 2y = 3$.

28. Deduzca una ecuación de la tangente a la curva en el punto dado:

    (a) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1, \quad (-5, \dfrac{9}{4})$ (hipérbola)

    (b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{36} = 1, \quad (-1, 4\sqrt{2})$ (elipse)

    (c) $y^2 = x^3(2-x), \quad (1,1)$

29. Si V es el volumen de un cubo cuyo lado mide x, calcule dV/dt en función de dx/dt

30. Si A es el área de un círculo de radio r, determine dA/dt respecto de dr/dt

31. Si $xy = 1$ y $dx/dt = 4$, calcule dy/dt cuando $x = 2$

32. Si $x^3 + 3xy + y^2 = 1$ y $dy/dt = 2$, calcule dx/dt cuando $y = 1$

33. Una bola de nieve esférica se funde de tal modo que su volumen se reduce a una velocidad de 1 cm^3/min. ¿Con qué velocidad disminuye el diámetro cuando mide 10 cm?

34. Un reflector en el piso alumbra un muro a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de altura camina del reflector hacia el muro a una velocidad de 1.6 m/s, ¿con qué velocidad disminuye la altura de su sombra en el edificio cuando está a 4 m de la pared?

35. Usando diferenciales, encuentre un valor aproximado de

    (a) $\sqrt{36.1}$
    (b) $\sqrt[3]{1.02}+\sqrt[4]{1.02}$
    (c) $\dfrac{1}{10.1}$
    (d) $(1.97)^6$
    (e) $\operatorname{sen} 59^\circ$
    (f) $\cos 31.5^\circ$

36. El lado de un cubo mide 30 cm, con un posible error de medición de 0.1 cm. Usando diferenciales, estime el error máximo posible en el cálculo de

    (a) el volumen del cubo
    (b) su área

37. Se dice que el radio de un disco circular mide 24 cm, con un error máximo de medición de 0.2 cm.

    (a) Con diferenciales estime el error máximo en el área calculada del disco
    (b) ¿Cuál es el error relativo?

38. Se midió la circunferencia de una esfera y el resultado fue 84 cm, con un posible error de 0.5 cm.

    (a) Con diferenciales estime el error máximo en el área calculada
    (b) ¿Cuál es el error relativo?

39. Determine la linealización $L(x)$ de cada una de las siguientes funciones en el punto a:

    (a) $f(x)=x^3, \quad a=1$
    (b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}, \quad a=0$
    (c) $f(x)=\dfrac{1}{x}, \quad a=4$
    (d) $f(x)=\sqrt[3]{x}, \quad a=-8$

40. Sea f una función tal que $f(1)=2$, cuya derivada se conoce y es $f'(x)=\sqrt{x^3+1}$

    (a) Estime el valor de $f(1.1)$ con una aproximación lineal.
    (b) ¿Cree que el valor exacto de $f(1.1)$ es menor o mayor que el estimado? ¿Por qué?

41. Calcule el número positivo que, sumado a su inverso multiplicativo dé por resultado una suma mínima.

42. Un recipiente de almacenamiento sin tapa debe tener 10 m^3 de volumen. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material de su base cuesta \$ 10 por m^2 y el de los lados \$ 6 por m^2. Calcule el costo mínimo de los materiales para ese recipiente.

43. Las márgenes superior e inferior de un cartel tienen 6 cm de ancho y los laterales 4 cm. Si el área del material impreso del cartel se fija en 385 cm^2, calcule el área mínima total del cartel.

44. La altura de un triángulo aumenta con una velocidad de 1 cm/min, mientras su área lo hace a una velocidad de 2 cm^2/min. ¿Con qué velocidad aumenta la base del triángulo cuando su altura es de 100 cm y su área es de 100 cm^2.

Capítulo 5

Integrales

5.1 Reglas de integración

1. Calcule las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x^4+2)}{x^3}\ \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \left(3x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2\ \mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^5 \sqrt{3x+1}\ \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_3^{16} \sqrt[3]{33-2x}\ \mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^{16} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_1^2 2^x\ \mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{7-x}$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\ \mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_0^5 \frac{x+1}{x^2+2x+5}\ \mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}-24}\ \mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}\ \mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\ \mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} (\operatorname{sen} 2x + \cos 3x)\ \mathrm{d}x$

(o) $\displaystyle\int \tan x\ \mathrm{d}x$

(p) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^2 x}$

2. Calcule las integrales:

(a) $\displaystyle\int x\ \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 (1-2x)\ \mathrm{e}^{-2x}\ \mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int x^2 \cos x\ \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\ \mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^2 x}$

(e) $\displaystyle\int_3^9 x \ln(x-1)\ \mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\ \mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^2 x \ln(x^2+4)\ \mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen} 2x\ \mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^4 x\ \mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\ \mathrm{d}x$

3. Calcule las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\ dx$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\ dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\ \ln(x+1)\ dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ \ln x}\ dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \arccos x\ dx$

(f) $\displaystyle\int_0^1 x^3\ e^{x^2}\ dx$

(g) $\displaystyle\int e^x\,(1-\ e^x)^{-1}\ dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

4. Calcule las integrales:

(a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2+4x+24}{x^2-4x+8}\ dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}\ dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4}\ dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\ dx$ (Ayuda: sustituya $x^2+1=t$)

(e) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2+3x+2}\ dx$

(f) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{x^3-3x+2}\ dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

5. Calcule las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x\ dx}{1+\cos^2 x}$

(b) $\displaystyle\int \tan^2 x\ dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{2}{1+\cos x}\ dx$

(d) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x}\ dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\ \operatorname{sen} x}$

(f) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

(g) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\ dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

(i) $\displaystyle\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{7+6x-x^2}}$

(j) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{12x-8-3x^2}}$

(k) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

(l) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

(m) $\displaystyle\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\ dx$

6. Calcule la derivada de las siguientes funciones

(a) $\displaystyle f(x)=\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t^2\ dt}{1+\cos^2 t}$

(b) $\displaystyle f(x)=\int_0^{x^2} \frac{e^{t^2}+1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt$

(c) $\displaystyle f(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^3} \frac{t+1}{\sqrt{1+2^t}}\ dt$

7. Demuestre que para todas las funciones integrables $f(x)$ se cumple que:

$$\int_0^\pi x\,f(\operatorname{sen} x)\ dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\ dx$$

Ayuda: haga la sustitución $x=\pi-t$

8. Exprese $\lim_{n\to\infty} S_n$ como una integral definida en los siguientes casos:

   (a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$. (b) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n} \ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)$. (c) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

9. Calcule usando $\lim_{n\to\infty} S_n$ la integral

   (a) $\displaystyle\int_1^2 x \;\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^3 \mathrm{e}^{\,x} \;\mathrm{d}x$.
   Ayuda: use que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(1-\mathrm{e}^{3/n}) = -3$.

   (Construya la suma de Riemann superior).

5.2 Aplicaciones de la Integración

10. Trace la región limitada por las curvas dadas y calcule su área:

    (a) $y = 4x^2, \quad y = x^2 + 3$
    (b) $x + y^2 = 2, \quad x + y = 0$
    (c) $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$
    (d) $y = |x|, \quad y = (x+1)^2 - 7, \quad x = -4$
    (e) $y = |x-1|, \quad y = x^2 - 3, \quad x = 0$
    (f) $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 1, \quad x = 2$
    (g) $y = \mathrm{e}^x, \quad y = \mathrm{e}^{-x}, \quad x = -2, \quad x = 1$

11. Use el cálculo integral para determinar el área de los triángulos cuyos vértices se dan a continuación:

    (a) (0,0); (1,8); (4,3). (b) (-2,5); (0,-3); (5,2).

12. Calcule el área de la región limitada por la parábola $y = x^2$, la tangente a ella en el punto (1,1) y el eje x.

13. Calcule el número b tal que la recta $y = b$ divida la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones iguales.

14. Calcule el volumen del cuerpo que se genera al girar la región delimitada por las curvas mencionadas alrededor del eje dado en cada caso. Haga un esquema de la región y del cuerpo.

    (a) $x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$; alrededor del eje x.
    (b) $y = x^2, \quad y = 4, \quad x = 0, \quad x = 2$; alrededor del eje y.
    (c) $y = x, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 4$; alrededor de $x = 1$.
    (d) $y = \mathrm{e}^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$; alrededor del eje x.

15. Calcule el volumen de los cuerpos descriptos a continuación:

    (a) El volumen de una esfera de radio R.
    (b) Un cono circular recto de altura h y radio de la base r.
    (c) Un casquete de altura h, de una esfera de radio r.
    (d) Una pirámide de altura h y base en forma de triángulo equilátero de lado a (un tetrahedro).
    (e) El volumen común a dos esferas, ambas de radio r, si el centro de cada una está en la superficie de la otra.

16. Use el método de los cascarones cilíndricos para calcular el volumen generado al hacer girar la región acotada por las curvas dadas, en torno del eje y:

(a) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$

(b) $y = x^2, \quad y = 4, \quad x = 0.$

17. Use el método de los cascarones cilíndricos para calcular el volumen generado al hacer girar la región acotada por las curvas dadas, en torno del eje x:

(a) $x = y^2, \quad x = 0, \quad y = 2, \quad y = 5.$

(b) $y = x, \quad x = 0, \quad x + y = 2.$

18. Si la región acotada por las curvas dadas se hace girar en torno del eje especificado, calcule el volumen del cuerpo resultante usando cualquier método:

(a) $y = x^2 + x - 2, \quad y = 0$, en torno del eje x.

(b) $x = 1 - y^2, \quad x = 0$, en torno del eje y.

(c) $x^2 + (y-1)^2 = 1$, en torno del eje y.

5.3 Longitud de arco, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

19. Usando la fórmula de la longitud de arco, calcule la longitud de la curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq x \leq 2$. Compruebe su respuesta notando que la curva dada es un cuarto de círculo.

20. Calcule la longitud de cada una de estas curvas:

(a) $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}, \quad 1 \leq x \leq 2$

(b) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln x}{4}, \quad 2 \leq x \leq 4$

(c) $y = \mathrm{e}^x, \quad 0 \leq x \leq 1$

(d) $y = \ln x, \quad 1 \leq x \leq \sqrt{3}$

(e) $y^2 = 4x, \quad 0 \leq y \leq 2$

21. Calcule el área de la superficie obtenida al hacer girar una de las siguientes curvas alrededor del eje x:

(a) $y = \sqrt{x}, \quad 4 \leq x \leq 9$

(b) $y = x^3, \quad 0 \leq x \leq 2$

(c) $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

(d) $x = 1 + 2y^2, \quad 1 \leq y \leq 2$

(e) $y^2 = 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 8$

(f) $y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/3$

(g) $2y = 3x^{2/3}, \quad 1 \leq x \leq 8$

22. Calcule el área de la superficie obtenida al hacer girar una de las siguientes curvas alrededor del eje y:

(a) $y = \sqrt[3]{x}, \quad 1 \leq y \leq 2$

(b) $x = \mathrm{e}^{2y}, \quad 0 \leq y \leq 1/2$

(c) $x = \sqrt{2y - y^2}, \quad 0 \leq y \leq 1$

(d) $y = 1 - x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$

(e) $x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(y^2 - \ln y) \quad 1 \leq y \leq 2$

(f) $x = a \cosh\left(\dfrac{y}{a}\right) \quad -a \leq y \leq a$

23. Trace las curvas representadas por las siguientes curvas paramétricas. Elimine el parámetro para hallar la ecuación cartesiana de cada curva.

(a) $x = 1 - t, \quad y = 2 + 3t$

(b) $x = 2t - 1, \quad y = t^2 - 1$

(c) $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - t$

(d) $x = \operatorname{sen}^2\theta, \quad y = \cos^2\theta$

(e) $x = \mathrm{e}^t, \quad y = \mathrm{e}^{-t}$

(f) $x = \mathrm{e}^t, \quad y = \sqrt{t}, \quad 0 \leq t \leq 1$

24. Investigue la familia de curvas definida por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - ct$. Cómo cambia la forma al aumentar c? Ilustre su respuesta graficando varios miembros de la familia.

25. Las **curvas de catástrofe de cola de Milano** se definen mediante las ecuaciones paramétrics $x = 2ct - 4t^3,\ y = -ct^2 + 3t^4$. Grafica varias de ellas. Qué características tienen en común? Cómo cambian cuando c aumenta?

26. Las curvas cuyas ecuaciones son $x = a \operatorname{sen} nt,\ y = b \cos nt$, se denominan **figuras de Lissajous**. Investiga cómo varían al cambiar a, b y n. (Defina a n como un entero positivo).

27. Deduzca una ecuación de la tangente a la curva en el punto que corresponde al valor citado del parámetro.

    (a) $x = t^2 + t,\ y = t^2 - t;\ t = 0$

    (b) $x = 1 - t^3,\ y = t^2 - 3t;\ t = 1$

    (c) $x = \ln t,\ y = t\ \mathrm{e}^t;\ t = 1$

    (d) $x = t\ \operatorname{sen} t,\ y = t\ \cos t;\ t = \pi$

28. Determine $dy/\ \mathrm{d}x$ y $d^2y/\ \mathrm{d}x^2$.

    (a) $x = t^2 + t,\ y = t^2 + 1$

    (b) $x = \ \mathrm{e}^{-t},\ y = t\ \mathrm{e}^{2t}$

    (c) $x = 1 + t^2,\ y = t\ \ln t$

    (d) $x = \ \operatorname{sen} \pi t,\ y = \cos \pi t$

29. En qué puntos de la curva $x = t^3 + 4t,\ y = 6t^2$ la tangente es paralela a la recta cuyas ecuaciones son $x = -7t,\ y = 12t - 5$?

30. Deduzca las ecuaciones de las tangentes a la curva $x = 3t^2 + 1,\ y = 2t^3 + 1$ que pasan por el punto (4, 3).

31. Calcule el área limitada por la curva $x = t - 1/t,\ y = t + 1/t$ y la recta $y = 2.5$.

32. Calcule la longitud de cada una de estas curvas:

    (a) $x = t^3,\ y = t^2;\quad 0 \leq t \leq 4$

    (b) $x = a(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta),\ y = a(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta);\ 0 \leq \theta \leq \pi$

    (c) $x = 2 - 3 \operatorname{sen}^2\theta,\ y = \cos 2\theta;\quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

    (d) $x = \ \mathrm{e}^t - 1,\ y = 4\ \mathrm{e}^{t/2};\quad 0 \leq t \leq 1$

33. Calcule el área de la región limitada por la curva dada, que está en el sector especificado:

    (a) $r = \theta;\quad 0 \leq \theta \leq \pi$

    (b) $r = 2\cos\theta;\quad 0 \leq \theta \leq \pi/6$

    (c) $r = 1/\theta;\quad \pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6$

    (d) $r = \mathrm{e}^\theta;\quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

34. Trace la curva representada por cada ecuación y calcule el área que encierra:

    (a) $r = 5\operatorname{sen}\theta$

    (b) $r^2 = 4\cos 2\theta$

    (c) $r = 4 - \operatorname{sen}\theta$

    (d) $r = 4(1 - \cos\theta)$

35. Calcule el área de la región que está dentro de la primera curva y fuera de la segunda:

    (a) $r_1 = 1 - \cos\theta;\quad r_2 = 3/2$

    (b) $r_1 = 4\operatorname{sen}\theta;\quad r_2 = 2$

    (c) $r_1 = 3\cos\theta;\quad r_2 = 1 + \cos\theta$

    (d) $r_1 = 1 + \cos\theta;\quad r_2 = 3\ \cos\theta$

36. Calcule el área de la región interna común a ambas curvas:

    (a) $r_1 = \ \operatorname{sen}\theta;\quad r_2 = \cos\theta$

    (b) $r_1 = \ \operatorname{sen} 2\theta;\quad r_2 = \ \operatorname{sen}\theta$

    (c) $r_1 = 3 + 2\operatorname{sen}\theta;\quad r_2 = 2$

    (d) $r_1 = \ \operatorname{sen} 2\theta;\quad r_2 = \cos 2\theta$

37. Localice todos los puntos de intersección de las curvas dadas:

(a) $r_1 = \operatorname{sen}\theta; \quad r_2 = \cos\theta$

(b) $r_1 = \cos\theta; \quad r_2 = 1 - \cos\theta$

(c) $r_1 = \operatorname{sen}\theta; \quad r_2 = \operatorname{sen} 2\theta$

(d) $r_1 = 2; \quad r_2 = 2\cos 2\theta$

5.4 Integrales impropias

38. Diga si cada una de las siguientes integrales es convergente o divergente y evalúe las convergentes:

(a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+3}}\ \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(2x-3)^2}\ \mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\ \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\ \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+2)(x+3)}\ \mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x\ \mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{5}{2x+3}\ \mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} x\ \mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\ \mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\ \mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int_0^{3} \frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x$

(o) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4}\ \mathrm{d}x$

(p) $\displaystyle\int_4^{5} \frac{1}{(5-x)^{2/5}}\ \mathrm{d}x$

(q) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \tan^2 x\ \mathrm{d}x$

(r) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sec x\ \mathrm{d}x$

(s) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2-1}\ \mathrm{d}x$

(t) $\displaystyle\int_0^{1} x \ln x\ \mathrm{d}x$

39. (a) Evalúe la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n\ \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$ para n =0, 1, 2 y 3.

(b) Estime el valor de $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n\ \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$ cuando n es un entero positivo arbitrario.

(c) Pruebe qué tan buena fue su estimación, usando inducción matemática.

40. Una función f positiva se llama *función de densidad de probabilidad* si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$.

(a) Demuestre que si $c > 0$, la función f, definida por

$$\begin{cases} f(x) = c\ \mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

es una función de densidad de probabilidad.

(b) Calcule el *promedio*:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\ \mathrm{d}x.$$

(c) Calcule la *desviación estándar*:

$$\sigma = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \, f(x) \ \mathrm{d}x . \right]^{1/2}$$

41. Si $f(t)$ es continua cuando $t \geq 0$, la *transformada de Laplace* de f es la función F definida por

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \ \mathrm{e}^{-st} \, dt,$$

y el dominio de F es el conjunto formado por todos los números s para los cuales converge la integral. Encuentre la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

(a) $f(t) = 1$

(b) $f(t) = \mathrm{e}^{t}$

(c) $f(t) = t$

42. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 \ \mathrm{e}^{-x^2} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \ \mathrm{d}x.$

Capítulo 6

Fórmula de Taylor y L'Hôpital

6.1 Desarrollo de Taylor

1. Calcule, usando la definición, el desarrollo de Taylor de orden 3 de $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ alrededor de $x = 2$.
2. Usando desarrollos conocidos de MacLaurin, calcule el desarrollo de MacLaurin de orden 4 de

   (a) $f(x) = \sqrt{1+x}$.

   (b) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   (d) $g(x) = x^2\ \mathrm{e}^{x^2}$.

   (e) $f(x) = \mathrm{e}^x \ln(1+x)$.

3. Use el desarrollo de MacLaurin de $h(x) = \dfrac{1}{1-x}$ para calcular el desarrollo de MacLaurin de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{1-x}$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{1+2x+3x^2}$

4. Use algún desarrollo de MacLaurin conocido para calcular el desarrollo de Taylor de orden 2 de $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$ alrededor de $x = 2$.
5. Use algún desarrollo de MacLaurin conocido para calcular el desarrollo de Taylor de orden 6 de $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)(x-3)}$ alrededor de $x = 1$.
6. (a) Usando el desarrollo de MacLaurin determine los primeros tres coeficientes no nulos de
   $$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt.$$
   (b) Use este resultado para aproximar $f(0.3)$.
7. Sea $f(x) = x^2\ \mathrm{e}^{-x/a}$. Calcule $f^{(n)}(0)$, con n un entero ≥ 1.
8. Usando desarrollos conocidos, calcule el desarrollo de MacLaurin hasta orden 2 de $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \cos x}{\operatorname{sen} 3x}$.
9. Usando desarrollos conocidos de MacLaurin, calcule el desarrollo de Taylor hasta orden 2 alrededor de $x = -2$ de $g(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{1+x}$.
10. (a) La ecuación $x - \mathrm{e}^{-x} + 1 + \epsilon = 0$ tiene, para $\epsilon = 0$, la solución $x = 0$. Considere a x como función de ϵ y determine el desarrollo de MacLaurin de x, de grado 2.

    (b) Use este resultado para aproximar $y(0.3)$.

6.2 Límite

11. Calcule los siguientes límites usando MacLaurin:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{\arctan x - x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - \ln(1+x)}{1-\cos x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{2x}-1)\ln(x^3+1)}{(1-\cos 3x)^2}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{sen} 3x - 3\operatorname{sen} 2x}{5x - \arctan 5x}$.

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{3x^2}}{x\ \operatorname{sen} 2x}$.

12. Calcule usando L'Hôpital

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{x\ln x}\right)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{10^x - e^x}{x}$.

(c) $\lim\limits_{x\to (\pi/2)^-} (\tan x)^{\cos x}$.

13. Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{2-\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\ln(2-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x^2} - \cos 2x}{x^4}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{(1-\cos x)\ \ln(1+x)}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$

(h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2) - (\ln x)^2}{x-\sqrt{x}}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$

(j) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(e^x - \cos x)}{\ln(x+\operatorname{sen} x)}$

(k) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt[3]{x^6+3x^5}\right)$

(l) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \tan(\operatorname{sen} x)}{x^3}$

(n) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(e^x-1)}{\ln(\sqrt{x}-x)}$

(o) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)^{\tan x}$.

Los ejercicios a,c,e,f,g,h calcúlelos con MacLaurin y con L'Hôpital.

14. Use el desarrollo de MacLaurin correspondiente para calcular

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$$

15. Determine el comportamiento asintótico (cuando x es muy grande) de

$$g(x) = \sqrt{x^4+x+1} - (3+x^2),$$

aproximándola a un polinomio en x.

Capítulo 7

Sucesiones y series

1. Determine si la sucesión es: (i) acotada por arriba y/o por abajo; (ii) positiva o negativa (en la cola); (iii) creciente, decreciente o alternante; (iv) convergente, divergente, divergente a ∞ o $-\infty$.

   (a) $\left\{\dfrac{2n}{n^2+1}\right\}$

   (b) $\left\{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$

   (c) $\left\{\dfrac{(-1)^n n}{e^n}\right\}$

   (d) $\left\{\dfrac{2n^2}{n^2+1}\right\}$

   (e) $\left\{4-\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$

   (f) $\left\{\dfrac{2^n}{n^n}\right\}$

   (g) $\{1, 1, -2, 3, 3, -4, 5, 5, -6, \ldots\}$

2. Evalúe, cuando sea posible, el límite de la sucesión $\{a_n\}$.

   (a) $a_n = \dfrac{5-2n}{3n-7}$

   (b) $a_n = \dfrac{n}{\ln(n+1)}$

   (c) $a_n = n - \sqrt{n^2-4n}$

   (d) $a_n = \dfrac{n^2-4}{n+5}$

   (e) $a_n = \left(\dfrac{n-3}{n}\right)^n$

   (f) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

3. Pruebe que si $\{|a_n|\}$ es acotada, entonces $\{a_n\}$ también lo es.

4. Encuentre la suma de las series, o demuestre que divergen:

   (a) $3 - \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{16} - \dfrac{3}{64} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}}$

   (c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \pi^{j/2}\cos(j\pi)$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots$

   (e) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-5)^n}{8^{2n}}$

   (g) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots$

5. Escriba los siguientes números decimales como series infinitas:

   (a) $0.21212121\dots$

   (b) $0.125125125125\dots$

6. Diga si las siguientes series convergen o divergen (justifique sus respuestas)

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

7. Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+2)k!} = \int_0^1 xe^{x^3}\,\mathrm{d}x$

8. Use los tests de convergencia para determinar si las series convergen o divergen:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n+5}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{100}2^n}{\sqrt{n!}}$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1i}$

   (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^3}$

   (j) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln(\ln n)}}$

   (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2e^n}$

   (l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$

9. Determine si las series convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\ln n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-1)}{n^2+1}$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi^n}$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-100)^n}$

10. Determine el centro, radio e intervalo de convergencia:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}}\, x^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}\,(4-x)^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3(2x-3)^n$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{n!}\, x^n$

11. Use la expansión $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots$, válida en el rango $-1 < x < 1$, para representar las siguientes funciones:

   (a) $\dfrac{1}{2-x}$ en potencias de x

   (b) $\ln x$ en potencias de $(x-4)$

   (c) $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ en potencias de x

   (d) $\dfrac{1}{x^2}$ en potencias de $(x+2)$

12. Determine el intervalo de convergencia y la suma de la serie:

   (a) $1.3 - 2.4x + 3.5x^2 - 4.6x^3 + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+3)x^n$

   (b) $1 - 4x + 16x^2 - 64x^3 + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x)^n$

   (c) $3 + 4x + 5x^2 + 6x^3 + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n$

13. Encuentre la representación en serie de MacLaurin de las siguientes funciones. ¿Para qué valores de x es válida la representación?

   (a) $\cos(2x^3)$

   (b) $\arctan(5x^2)$

   (c) $\ln(2+x^2)$

14. Encuentre la representación en serie de Taylor de las siguientes funciones. ¿Para qué valores de x es válida la representación?

   (a) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ alrededor de $x = \dfrac{\pi}{2}$

   (b) $f(x) = \ln x$ en potencias de $(x-3)$

15. Use desarrollos de Taylor o MacLaurin para aproximar las siguientes funciones con un error menor que 5×10^{-5}:

   (a) $e^{0.2}$

   (b) $\ln\left(\frac{6}{5}\right)$

16. Encuentre la serie de MacLaurin de:

   (a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(t^2)\,dt$

   (b) $F(x) = \displaystyle\int_0^{1+x} \frac{\ln t}{t-1}\,dt$

   (c) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\arctan(t^2)}{t^2}\,dt$

17. (a) Calcule los primeros términos no nulos en el desarrollo de MacLaurin de:

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

   (b) Use el resultado anterior para aproximar $f(x) = \displaystyle\int_0^{0.3} e^{-t^2}\,dt$

Capítulo 8

Ecuaciones diferenciales

1. Indique el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales y diga si son o no lineales. En caso afirmativo, diga si son homogéneas o no.

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = 5y$

   (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x = y$

   (c) $y''' + x\,y' = x \operatorname{sen} x$

   (d) $y'' + 4\,y' - 3\,y = 2\,y^2$

   (e) $y\dfrac{dy}{dx} = x$

   (f) $y'' + (x \operatorname{sen} x)\,y' = y$

   (g) $y^{(4)} + e^x\,y'' = x^3\,y'$

2. Compruebe que $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$. ¿Es alguna de las siguientes una solución? Justifique su respuesta.

   (a) $\cos x$

   (b) x^e

   (c) $\cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

3. La función $y_1 = \cos kx$ es solución de $y'' + k^2 y = 0$. Encuentre otra solución y_2 que no sea múltiplo de y_1. Luego encuentre una solución que satisfaga que $y(\pi/k) = 3$ e $y'(\pi/k) = 3$.

4. Encuentre una solución de $y'' + y = 0$ que satisfaga que $y(\pi/2) = 2\,y(0)$ e $y(\pi/4) = 3$.

5. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y-1}{x}$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^3}$

   (c) $\dfrac{dx}{dt} = e^x \operatorname{sen} t$

   (d) $\dfrac{dy}{dx} = y^2(1-y)$

   (e) $\dfrac{dy}{dx} = 1 - y^2$

   (f) $\dfrac{dy}{dt} = 2 + e^y$

   (g) $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x \cos^2 y$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   (a) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x} = x^2$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$

   (c) $\dfrac{dy}{dx} + y = e^x$

   (d) $\dfrac{dy}{dx} + 2\,e^x y = e^x$

   (e) $\dfrac{dy}{dt} + 10y = 1;\;\; y(1/10) = 2/10$

   (f) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$

   (g) $\dfrac{dy}{dx} + y = x$

   (h) $\dfrac{dy}{dx} + 3\,x^2 y = x^2;\;\; y(0) = 1$

(i) $y' + (\cos x)\, y = 2\, x\, e^{-\operatorname{sen} x}$; $\;y(\pi) = 0$

7. Un objeto de masa m que está cayendo cerca de la superficie terrestre es frenado por la resistencia del aire, que es proporcional a su velocidad, de tal manera que –según la segunda ley de Newton–

$$m\,\frac{dv}{dt} = m\,g - k\,v,$$

donde $v = v(t)$ es la velocidad del objeto en el tiempo t, g es la aceleración de la gravedad cerca de la superficie terrestre y k es una constante de proporcionalidad. Suponiendo que el objeto está en reposo en $t = 0$, es decir $v(0) = 0$, y comienza a caer, encuentre la velocidad $v(t)$ para cualquier $t > 0$ (hasta que el objeto llega al suelo). Muestre que el límite para $t \to \infty$ existe. ¿Es necesaria la fórmula explícita de $v(t)$ para determinar esta velocidad límite?

8. Resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $y'' + 7\,y' + 10\,y = 0$
(b) $y'' + 2\,y' = 0$
(c) $y'' - 2\,y' + y = 0$
(d) $y'' + y' + y = 0$
(e) $y'' + y' + y = 0$; $\quad y(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}) = 0$; $y'(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}) = 1$
(f) $y^{(4)} + 2\,y'' + y = 0$
(g) $y'' - 2\,y' - 3\,y = 0$
(h) $y'' + 8\,y' + 16\,y = 0$
(i) $y'' + 2\,y' + 5\,y = 0$
(j) $2\,y'' + 5\,y' - 3\,y = 0$; $\quad y(0) = 1$; $y'(0) = 0$
(k) $y''' - 4\,y'' + 3\,y' = 0$

9. Resuelva usando el método de los coeficientes indeterminados:

(a) $y'' + y' - 2\,y = 1$
(b) $y'' + y' - 2\,y = e^{-x}$
(c) $y'' + 4\,y = x^2$
(d) $y'' + 2\,y' + 2\,y = e^x \operatorname{sen} x$
(e) $y'' + y' - 2\,y = x$
(f) $y'' + y' - 2\,y = e^x$
(g) $y'' - y' - 6\,y = e^{-2x}$
(h) $y'' + 2\,y' + 2\,y = e^{-x} \operatorname{sen} x$

10. Determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y'' - 2y' - 3y = 0.$
(b) $y'' - 2y' + 6y = 0.$
(c) $y'' + 6y' + 9y = 0.$

11. Determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y'' - 2y' = x.$
(b) $y'' + y' + y = x + 1.$
(c) $2y'' - 2y' + 3y = \mathrm{e}^x.$
(d) $y'' - 36y = \mathrm{e}^{6x}.$
(e) $y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{2x} \cos x.$
(f) $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen} x.$
(g) $y'' + 4y' + 5y = 8 \cos x.$

12. Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$y'' - 6y' + 25y = \mathrm{e}^{3x} \cos 4x, \qquad y(\pi/2) = 0, y'(0) = 1.$

13. (a) Determine todas las soluciones de $y'' - y = e^{-2x}$
(b) Determine todas las soluciones para las cuales $y(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Capítulo 9

Respuestas a algunos ejercicios

Capítulo 1

(1a) $[0,\ 5]$ (1b) $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ (1c) $[-3, 2)$

(2) Seis términos.

(3a) $x = 2 \pm \sqrt{3}$; $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$
(3b) $x = \dfrac{1}{3}$
(3c) $x = 1$
(3d) $x = 0$; ± 6
(3e) $x = 3$; $-\dfrac{3}{4}$
(3f) $x = -\sqrt{2}$
(3g) $x = 1$
(3h) No hay soluciones

(4a) $x \in (0,\ \infty)$
(4b) $x \in (-\infty,\ 5/3) \cup (2,\ \infty)$
(4c) $x \in (-\infty,\ -5) \cup (-1,\ 1)$
(4d) $x \in [-2,\ 0) \cup [4,\ \infty)$

(5a) $t = -1/2,\ -9/2$
(5b) $x \in (-\infty,\ 1]$
(5c) $x \in (1,\ \infty)$
(5d) $x \in (-\infty,\ -3) \cup (1,\ \infty)$
(5e) $x \in [-5/4,\ 1/2]$
(5f) $x \in (5/3,\ 3)$

(6a) $C = (3,\ 2)$; $\quad r = 2$
(6b) $C = (-4,\ 0)$; $\quad r = 2$

(7a) $y = -x + 1$
(7b) $y = 3x + 1$

(8) $y = 3x - 5$
(11) $x \in (-\infty,\ 4) \cup (-1,\ \infty)$
(12a) Complemento de la elipse con centro $C = (0,\ 0)$ y semiejes $\sqrt{2}$ (en x) y 1 (en y).
(12b) Círculo de radio $r = 1$ y centro $C = (0,\ 0)$.
(12c) Región del plano por arriba de la recta $y = 1 - x$.
(12d) Región del plano fuera del círculo de radio $r = 3$ y centro $C = (2,\ -1)$.
(12e) Hipérbola con centro $C = (0,\ 0)$.
(12f) Región del plano por arriba de la recta $y = -\frac{8}{5}x + 5$.
(12g) Región del plano dentro de la parábola $x = 1 - y^2$.
(12h) Parábola con vértice en $(0,\ 0)$, abierta hacia la izquierda.
(12i) Región del plano dentro de la parábola con vértice en $(1,\ 1)$.
(13) (a) 14 (b) 6 (c) 40
(14) $S = 15251$
(15) $S = 49140$
(16) $P = a^{\frac{n(n+1)}{2}}$

(17a) $S = \dfrac{(n+1)^2}{2}$

(17b) $S = \dfrac{1}{4}n(n+3)$

(18a) $S = \dfrac{27}{4}\left(1 + \dfrac{1}{3^{104}}\right)$

(18b $S = \dfrac{1+2^{2n+1}}{3}$

(19) (a) 252 (b) 75287520 (c) 75287520

(20) $1 - 9x + 36x^2 - 84x^3 + 126x^4 - 126x^5 + 84x^6 - 36x^7 + 9x^8 - x^9$

(21) $2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}x^{2k+1}$

(22a) 315

(22b) $10 \cdot 2^{10}$

Capítulo 2

(1a) $S = \dfrac{b}{2}\sqrt{100 - \dfrac{b^2}{4}}$

(1b) $0 < b < 20$

(2a) $\dfrac{2x+1}{x}$

(2b) $1 + x$

(2c) $\dfrac{x+2}{x+1}$

(2d) $\dfrac{2x+1}{x+1}$

(2e) -1

(3a) $x \neq 5/3$

(3b) $-1 \leq x \leq 1$

(3c) $x \geq 0$

(3d) $x \neq -3$ y $x \neq 2$

(5a) $D_g = (-\infty,\, 0];\ I_g = [0,\, \infty)$

(5b) $D_g = (-\infty,\, 3];\ I_g = [0,\, \infty)$

(5c) $D_g = I\!R;\ I_g = [0,\, \infty)$

(5d) $D_f = [2,\, \infty);\ I_f = (-\infty,\, 3])$

(5e) $D_f = I\!R;\ I_f = [-7/2,\, \infty)$

(6) (a) $D_{f+g} = [0,\, 5]$ (b) $D_{g/f} = [0,\, 5)$

(7a) $f \circ f = x^4$; $g \circ g = 2^{2^x}$; $f \circ g = 2^{2x}$; $g \circ f = 2^{x^2}$

(7b) $f \circ f = \dfrac{x-1}{2-x}$; $g \circ g = -\dfrac{1}{x}$; $f \circ g = -\dfrac{x+1}{2}$; $g \circ f = \dfrac{2-x}{x}$

(7c) $f \circ f = x^{1/4}$; $g \circ g = x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 16x$; $f \circ g = (x^2 - 4x)^{-1/2}$; $g \circ f = \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

(8) (a) $D_{f\circ g} = [0,\, 64/3]$ (b) $D_{g\circ f} = (-\infty,\, 8]$

(9a) Impar, $D_f = I\!R$

(9b) Sin paridad, $D_f = I\!R$

(9c) Par, $D_f = I\!R$

(9d) Impar, $D_f = I\!R$

(10a) $y = -\sqrt{x} \qquad x \geq 0$

(10b) $y = \dfrac{2-3x}{x+1} \qquad x \neq -1$

(10c) No tiene inversa

(11a) $f(x+1) = x^2 - 3x + 2 \qquad x \in I\!R$

(11b) $f(t) = \dfrac{1}{t}(1 + \sqrt{1+t^2})$

(11c) $f(t) = t^2 - 2$

(12) $x = 3 - \sqrt{10}$

(13) $\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)} < \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$

(14a) $(1-\log_{10} 3)^3$

(14b) 3

(17a) $x=0;\ 4$
(17b) $x=0;\ 4$
(17c) $x=\ln(1+\sqrt{2})$
(17d) $x\in[\sqrt{2},\ \infty)$

(17e) $x=-1$
(17f) $x=1;\ \mathrm{e}^4$
(17g) $\nexists$ solución en $\mathbb{R}$
(17h) $x=100;\ 0.1$

(18) $V=0.6^{\frac{\ln 181}{\ln 19}}\sim 1.06$
(19) $\kappa\sim 1.4$
(20a) $c=8/9;\ K=\ln\frac{3}{2}$
(20b) $f(4)=4.5.$
(20c) $x=\frac{\ln 4.5}{\ln 1.5}\sim 3.71$

(21a) $\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}$

(21b) $\dfrac{3-5\sqrt{3}}{6}$

(21c) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

(22a) $x=-n\pi;\ \dfrac{\pi}{4}(2n+1);\ n\in\mathbb{Z}$

(22b) $x=n\pi;\ n\in\mathbb{Z}$

(22c) $x=\dfrac{\pi}{2}(n+\dfrac{1}{4});\ -\pi(n+\dfrac{1}{4});\ n\in\mathbb{Z}$

(22d) $x=\dfrac{\pi}{3}+n\pi;\ n\in\mathbb{Z}$

(24a) $x=\dfrac{\pi}{3}+2n\pi;\ -\dfrac{\pi}{3}+2n\pi;\ n\in\mathbb{Z}$
(24b) $x=\dfrac{\pi}{6}+2n\pi;\ \dfrac{5\pi}{6}+2n\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}+2n\pi;\ n\in\mathbb{Z}$
(24c) $x=2n\pi;\ \dfrac{\pi}{2}+2n\pi;\ n\in\mathbb{Z}$
(24d) $x=2n\pi$
(24e) $x=\dfrac{\pi}{6}+2n\pi;\ \dfrac{5\pi}{6}+2n\pi;\ n\in\mathbb{Z}$
(24f) $x=\dfrac{\pi}{36}+n\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{5\pi}{36}+n\dfrac{\pi}{3};\ n\in\mathbb{Z}$
(24g) $x=\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{2}{7}n\pi;\ \dfrac{\pi}{2}-2n\pi;\ n\in\mathbb{Z}$
(24h) $x=\dfrac{\pi}{12}+2n\pi;\ \dfrac{-5\pi}{12}+2n\pi;\ \dfrac{7\pi}{12}+2n\pi;\ \dfrac{13\pi}{12}+2n\pi;\ ;\ n\in\mathbb{Z}$
(24i) $x=\dfrac{\pi}{20};\ \dfrac{9\pi}{20};\ \dfrac{17\pi}{20}$
(24j) $x=\dfrac{\pi}{4}+72\pi$
(24k) $x=\dfrac{95\pi}{12};\ \dfrac{269\pi}{36}$
(24l) $x=-\dfrac{28\pi}{3}$
(24m) $x=\dfrac{-\pi}{8}+n\pi;\ n=1,2,\dots 143$
(24n) $x=-7\pi$
(24o) $x=18\pi;\ 19\pi$
(24p) $x=\dfrac{-31\pi}{4};\ \dfrac{-15\pi}{2};\ \dfrac{-17\pi}{2};\ \dfrac{-19\pi}{2}$

(25a) $\dfrac{\pi}{6}$
(25b) π
(25c) $\dfrac{-\pi}{6}$
(25d) $\dfrac{5\pi}{6}$
(25e) 0

(25f) $\dfrac{5\pi}{6}$
(25g) $\dfrac{1}{2}$
(25h) $\dfrac{2\pi}{5}$
(25i) $\dfrac{-1}{2}$

(25j) $\dfrac{2\pi}{5}$
(25k) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
(25l) $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$
(25m) $\dfrac{1}{3}$

(26a) $x = \dfrac{1}{2}$

(26b) $x = \dfrac{1}{4}$

(26c) $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(26d) $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Capítulo 3

(1a) 0

(1b) $\epsilon = 0.2: \ a_1, \ldots a_4$; $\quad \epsilon = 0.1: \ a_1, \ldots a_9$; $\quad \epsilon = 0.05: \ a_1, \ldots a_{19}$

(2a) 1

(3a) 0
(3b) no existe
(3c) 0
(3d) 1
(3e) 1
(3f) 0
(3g) ∞
(3h) -1/2
(3i) 0

(4a) (1.99, 2.01)
(4b) $(-\sqrt{4.1}, -\sqrt{3.9}) \cup (\sqrt{3.9}, \sqrt{4.1})$

(6a) 1
(6b) 3
(6c) ∞
(6d) 2/3
(6e) 1/3
(6f) 1/2
(6g) 0
(6h) 1
(6i) -1
(6j) 1/2
(6k) 1
(6l) 1
(6m) ∞
(6n) 3
(6o) 1/2
(6p) 1
(6q) e^{-2}
(6r) -6/7

(7a) continua
(7b) discontinua en $x = -1$; $\displaystyle\lim_{x \to -1^-} = \infty$; $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} = -\infty$
(7c) discontinua en $x = 2$; $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} = 2$; $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} = 4$
(7d) continua
(7e) discontinua en $x = 1$; $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} = 0$; $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} = 1$

(8a) $D(f) = I\!R$; discontinua en $x = 2$
(8b) $D(f) = I\!R \setminus \{0\}$; discontinua en $x = 0$
(8c) $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; continua en su dominio
(8d) $D(f) = I\!R$; discontinua en $x = 0$
(8e) $D(f) = I\!R$; continua

(9a) $c = -2$

(10a) $g(0) = 0$
(10b) $h(0) = \mathrm{e}$
(10c) $f(0) = -\pi/2$
(10d) $g(0) = 0$

Capítulo 4

(1a) 5 (1b) $3x^2 - 2x + 2$ (1c) $-\dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}$

(2) (a) con (ii); (b) con (iv); (c) con (i); (d) con (iii)

(3a) $x = -2,\ x = 0,\ x = 5$
(3b) $x = -1,\ x = 2$
(4a) $f'^{-}(0.6) = -5; \quad f'^{+}(0.6) = 5$

(5a) $f'^{-}(4) = -1; \quad f'^{+}(4) = 1$
(5c) $x = 0,\ x = 5$ (5d) $x = 0,\ x = 4,\ x = 5$

(6a) $f'(x) = 7x^6 - 15x^2$
(6b) $f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 4x$
(6c) $f'(x) = \dfrac{2x}{(x+1)^3}$
(6d) $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
(6e) $f'(x) = \dfrac{2}{(x^2+2)^{3/2}}$
(6f) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^{1/2}(x-1)^{3/2}}$
(6g) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2\sqrt{(1-x^2)^3}}$
(6h) $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(-x^2 + 3x - 1)$
(6i) $f'(x) = \dfrac{1}{2x}$
(6j) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}$
(6k) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{2}{x}\right)$
(6l) $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x^2}\cos x^2$
(6m) $f'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$
(6n) $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$
(6o) $f'(x) = 0$
(6p) $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$
(6q) $f'(x) = x^{\tan x}\left(\dfrac{\tan x}{x} + \dfrac{\ln x}{1+x^2}\right)$
(6r) $f'(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

(7a) $\dfrac{1}{3(y^2+1)}$
(7b) $\dfrac{1-x-y}{x-y}$
(7c) $\dfrac{\mathrm{e}^y}{1 - x\,\mathrm{e}^y}$
(7d) $2 - \dfrac{y}{x - \sqrt{x}}$
(7e) $\dfrac{18x\sqrt[3]{x^2y^2} - y}{12y\sqrt[3]{x^2y^2} + x}$

(8) x

(9a) $2\left(\dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x\right)$
(9b) $\dfrac{3x}{(1-x^2)^{7/2}}$

(11) 8

(12) $\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$

(13a) $-4\mathrm{e}^x \operatorname{sen} x$
(13b) $2^{20}(x^2 + 20x + 95)\mathrm{e}^{2x}$

(14) $f'(x) = 1 + \ln x; \quad f^n(x) = (-1)^n \dfrac{(n-1)!}{x^{n-1}} \quad \forall\, n \geq 2$

(15a) El máximo es 5, en $x = 1$; el mínimo es 1, en $x = -1$
(15b) El máximo es 10, en $x = -3$; el mínimo es 0, en $x = -1$ y $x = 2$
(15c) El máximo es 3, en $x = -1$; el mínimo es 1, en $x = 1$
(15d) El máximo es 66, en $x = 10$; el mínimo es 2, en $x = 2$
(15e) El máximo es $5\mathrm{e}^3$, en $x = 3$; el mínimo es $-\mathrm{e}$, en $x = 1$

(19) Monótona creciente en $(-1,\,1)$; monótona decreciente en $(-\infty,\,-1)\cup(1,\,\infty)$

(20) Hay dos mínimos locales, en $x=1$ y $x=-1$

(21) $Im(f)=(-\infty,\,\pi/4)$

(24) En $(-1,\;0)$: $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}\,(x+1)$; en $(2,3)$: $y=3$; en $(3,0)$: no hay recta tangente

(25) $x=0$ y $x=2/3$

(27) $y=x-3\mathrm{e}^{-2}$

(28a) $y=-\dfrac{5}{4}x-4$ (28b) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+1)+4\sqrt{2}$ (28c) $y=x$

(29) $\dfrac{dV}{dt}=3x^2\dfrac{dx}{dt}$

(30) $\dfrac{dA}{dt}=2\pi\,r\,\dfrac{dr}{dt}$

(31) $\dfrac{dy}{dx}=-2y$

(32) $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{2(3x+2)}{3(x^2+1)}$

(33) $\dfrac{1}{50\pi}\dfrac{\text{cm}}{\text{min}}$

(34) Disminuye con velocidad 0.6 m/s

(35a) 6.0083 (35c) 0.0999 (35e) 0.857
(35b) 2.0117 (35d) 58.24 (35f) 0.84

(36a) 270 cm^3
(36b) 6 cm^2

(37a) 9.6π cm^2 (37b) 0.017

(38a) $84/\pi$ cm^2 (38b) 1/84 ($\approx$ 1.2%)

(39a) $L(x)=3x-2$ (39c) $L(x)=-\dfrac{1}{16}\,x+\dfrac{1}{2}$

(39b) $L(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\dfrac{x}{4}\right)$ (39d) $L(x)=-2+\dfrac{1}{6\sqrt[3]{2}}\,(x+8)$

(40a) $f(1,1)\approx 2.14$
(40b) mayor

(41) 1

(42) $\dfrac{540}{\sqrt[3]{36}}$

Capítulo 5

(1a) $9/4$
(1b) $3x^3 - 8x^{3/2} + 4\ln|x| + C$
(1c) 14
(1d) 30
(1e) 12
(1f) $\dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}$
(1g) $\dfrac{2}{\ln 2}$
(1h) $\ln 3$
(1i) $\ln 2$
(1j) $\dfrac{\ln 8}{2}$
(1k) $\ln 2$
(1l) $\ln \dfrac{5}{6}$
(1m) $\dfrac{\ln 2}{2}$
(1n) $7/12$
(1o) $-\ln|\cos x| + C$
(1p) $\sqrt{3}$

(2a) $(x+1)\mathrm{e}^x + C$
(2b) $\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^2$
(2c) $(x^2-1)\operatorname{sen} x + 2x\cos x + C$
(2d) $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ln 2}{2}$
(2e) $116\ln 2 - 21$
(2f) $x\,\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + C$
(2g) $8\ln 2 - 2$
(2h) $-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}(\operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x)}{5} + C$
(2i) $\dfrac{3\pi}{4}$
(2j) $-\cos x + \dfrac{1}{3}\cos^3 x + C$

(3a) 2
(3b) $2(\operatorname{sen}\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}) + C$
(3c) $2\ln 2 - \dfrac{1}{2}$
(3d) $\ln|\ln x| + C$
(3e) 1
(3f) $1/2$
(3g) $-\ln|1-\mathrm{e}^x| + C$
(3h) $2\arctan\sqrt{x-1}$

(4a) $2 + 4\ln 2 + 4\pi$
(4b) $\ln 2 + \dfrac{\pi}{4}$
(4c) $\dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{\pi}{8}$
(4d) $\dfrac{1}{2t}\left(\dfrac{1}{2t} - 1\right) + C$
(4e) $-\ln 5 + 4\ln 2 - \ln 3$
(4f) $\dfrac{2}{3} + \ln\dfrac{2}{3}$
(4g) $\dfrac{1}{2}\ln|x+1| - \dfrac{1}{4}\ln|x^2+1| + \dfrac{1}{2}\arctan x + C$

(5a) $\pi/4$
(5b) $\tan x - x + C$
(5c) 2
(5d) $\dfrac{\ln 3}{2}$
(5e) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$
(5f) $\pi/6$
(5g) $9 + 4\ln 2$
(5h) $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2x}{3} + C$
(5i) $\dfrac{\pi}{24}$
(5j) $\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9}$
(5k) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$
(5l) π
(5m) $200\sqrt{2}$

(10a) Área$= 4$
(10b) Área$= 27/6$
(10c) Área$= 2\sqrt{2} - 2$
(10d) Área$= 44$
(10e) Área$= 13/3$
(10f) Área$= \ln 2 - 1/2$
(10g) Área$= 2 - (1+\mathrm{e})/\mathrm{e}^2$

(11a) $29/2$
(11b) 25

(12) $1/12$

(13) $b = 8/3$

(14a) $\pi/3$
(14b) 8π
(14c) $25\pi/3$
(14d) $\pi(\mathrm{e}^2-1)/2$

(15a) $\frac{4}{3}\pi R^3$
(15b) $\frac{1}{3}\pi\frac{r^2}{h^2}$
(15c) $\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)$
(15d) $\frac{a^2h}{4\sqrt{3}}$
(15e) $\frac{5\pi}{12}r^3$

(16a) $\frac{15\pi}{2}$
(16b) 8π

(17a) $\frac{609\pi}{2}$
(17b) 2π

(18a) $\frac{81\pi}{10}$
(18b) $\frac{8\pi}{3}$
(18c) $\frac{4\pi}{3}$

(21a) $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{37^3}-\sqrt{17^3})$
(21b) $\frac{\pi}{27}(145^{3/2})$
(21c) $\pi\left(2\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$
(21d) $\frac{\pi}{4}(65\sqrt{65}-17\sqrt{17})$
(21e) $\frac{8^{3/2}\pi}{3}(\sqrt{125}-1)$
(21f) $\pi\left[\frac{\sqrt{21}}{4}+\ln\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)\right]$
(21g) $3\pi\left(20\sqrt{5}-\frac{4}{5}\sqrt{2}\right)$

(22a) $\frac{\pi}{27}(145^{3/2}-10^{3/2})$
(22b) $\frac{\pi}{4}\left[2\ \mathrm{e}\ \sqrt{4\ \mathrm{e}^2+1}-2\sqrt{5}+\ln\left(\frac{2\ \mathrm{e}\ +\sqrt{4\ \mathrm{e}^2+1}}{2+\sqrt{5}}\right)\right]$
(22e) $\frac{\pi}{8}\left[21-8\ln 2-(\ln 2)^2\right]$
(22f) $\pi a^2\sinh 2+a$

(23a) $y=-3x+5$
(23b) $y=\left(\frac{x+1}{2}\right)2-1$
(23c) $y=1-x^2$
(23d) $y=1-x$
(23e) $y=1/x$
(23f) $y=\sqrt{\ln x}$

(27a) $y=-x$
(27b) $y=x/2-2$
(27c) $y=\ \mathrm{e}\ (2x+1)$
(27d) $y=x/\pi-\pi$

(28a) $\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{2t+1};\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{(2t+1)^3}$
(28b) $\frac{dy}{dx}=-\mathrm{e}^{3t}(2t+1);\ \frac{d^2y}{dx^2}=\mathrm{e}^{4t}(6t+5)$
(28c) $\frac{dy}{dx}=\frac{\ln t+1}{2t};\ fracd^2ydx^2=\frac{-\ln t}{4t^3}$
(28d) $\frac{dy}{dx}=-\tan\pi t;\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\sec^3\pi t$

(29) $P_1=(-5,6);\ P_2=(-\frac{208}{27};\ \frac{32}{3})$
(30) $y=x-1$
(31) $A=\frac{15}{4}-\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right)-4\ln 2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}-16\right)$

(32a) $L=\frac{8}{27}\left(37\sqrt{37}-1\right)$
(32b) $L=\frac{|a|\pi^2}{2}$
(32c) $L=\sqrt{13}$
(32d) $L=\mathrm{e}$

(33a) $A = \dfrac{\pi^3}{6}$

(33b) $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\pi}{6}$

(33c) $A = \dfrac{12}{5\pi}$

(33d) $A = \dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{\theta} - \mathrm{e}^{-\theta})$

(34a) $A = \dfrac{25\pi}{4}$

(34b) $A = 4$

(34c) $A = \dfrac{33\pi}{2}$

(34d) $A = 24\pi$

(35a) $A = \dfrac{9\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi}{4}$

(35b) $A = \dfrac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$

(35c) $A = \pi$

(36a) $A = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{4}$

(36b) $A = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{16}$

(36c) $A = \dfrac{19\pi}{3} - \dfrac{11\sqrt{3}}{2}$

(36d) $A = \dfrac{\pi}{2} - 1$

(37a) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$; $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$

(38a) ∞
(38b) $\dfrac{1}{2}$
(38c) 0
(38d) 1
(38e) 0
(38f) $\ln 3 - \ln 2$
(38g) diverge
(38h) ∞
(38i) $\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$
(38j) ∞
(38k) 0
(38l) 1
(38m) $2\sqrt{3}$
(38n) ∞
(38o) ∞
(38p) $\dfrac{5}{3}$
(38q) ∞
(38t) $-\dfrac{1}{4}$

(40b) $\mu = \frac{1}{\mathrm{f}}$
(40c) $\sigma = \frac{\mathrm{f}}{c}$
(41a) $F(s) = \dfrac{1}{s}$
(41b) $F(s) = \dfrac{1}{1-s} \quad \forall \;\; s > 1$
(41c) $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$

Capítulo 6

(3a) $3 + 5x + 5x^2 + O(x^3)$

(3b) $1 + 2x + 7x2 + (x^3)$

(5) $f(x) = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{16}(x-1)^2 - \dfrac{1}{64}(x-1)^4 - \dfrac{1}{256}(x-1)^6 + O\left((x-1)^8\right)$
(6a) $x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{10}x^5 + O(x^7)$
(6b) $f(0.3) \sim 0.29124$
(7) $f^{(n)}(0) = \dfrac{n(n-1)}{(-a)^(n-2)}$
(8) $f(x) = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{6}x + O(x^3)$
(9) $g(x) = -5x\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) + O(x^3)$

(11a) $\frac{1}{2}$
(11b) 1
(11c) $\frac{8}{81}$
(11d) $-\frac{3}{25}$
(11e) $-\frac{3}{2}$

(12a) $\frac{3}{2}$
(12b) $\ln 2 + \ln 5 - 1$

(13a) 4
(13b) $-\frac{1}{2}$
(13c) $\frac{4}{3}$
(13d) -1
(13e) -2
(13f) $\frac{1}{3}$
(13g) 1
(13h) 4
(13i) $\frac{1}{2}$
(13j) 1
(13k) $\frac{1}{2}$
(13l) e^{-1}
(13m) $\frac{1}{2}$
(13n) 2
(13o) 1

Capítulo 7

(1a) Acotada, positiva, decreciente, convergente.
(1b) Acotada, positiva, decreciente, convergente.
(1c) Acotada, ni positiva ni negativa, alternante, convergente.
(1d) Acotada, positiva, creciente, convergente.
(1e) Acotada, positiva, ni creciente ni decreciente ni alternante, convergente.
(1f) Acotada, positiva, decreciente, convergente.
(1g) No acotada, ni positiva ni negativa, ni creciente ni decreciente ni alternante, divergente.

(2a) -2/3
(2b) ∞
(2c) 2
(2d) ∞
(2e) e^{-3}
(2f) 0

(4a) $\frac{12}{5}$
(4b) $5\,\frac{10^3}{10^3-1}$
(4c) diverge
(4d) $\frac{1}{2}$
(4e) $\frac{1}{2}$
(4f) $\frac{25}{4416}$
(4g) $\frac{8\,\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}-2}$
(4h) $\frac{3}{4}$
(4i) $\frac{1}{3}$

(5a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{21}{100^n}$
(5b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{125}{1000^n}$

(6a) Converge (Leibniz)
(6b) Converge (Criterio de la integral)

(8a) Convergente
(8b) Convergente
(8c) Convergente
(8d) Divergente
(8e) Convergente
(8f) Convergente
(8g) Convergente
(8h) Divergente
(8i) Divergente
(8j) Divergente
(8k) Divergente
(8l) Divergente

(9a) Converge absolutamente
(9b) Converge absolutamente
(9c) Converge condicionalmente
(9d) Converge condicionalmente
(9e) Converge condicionalmente
(9f) Diverge
(9g) Converge absolutamente
(9h) Diverge

(10a) $c = 0; \quad R = 4; \quad [-4, 4]$
(10b) $c = 4; \quad R = \dfrac{1}{\mathrm{e}}; \quad [4 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}, 4 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}]$
(10c) $c = 1/4; \quad R = \infty; \quad (-\infty, \infty)$
(10d) $c = -2; \quad R = 2; \quad (-4, 0)$
(10e) $c = 3/2; \quad R = 1/4; \quad (1, 2)$
(10f) $c = 0; \quad R = \infty; \quad (-\infty, \infty)$

(11a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$
(11b) $\displaystyle\ln 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)4^{n+1}} (x-4)^{n+1}$
(11c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} x^n$
(11d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} (x+2)^n$

(12b) La suma es $\dfrac{1}{1+4x}$, convergente en $(-1/4, 1/4)$
(12c) La suma es $\dfrac{3-2x}{(1-x)^2}$, convergente en $(-1, 1)$

(13a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} x^{6n} \quad \forall\, x \in I\!R$
(13b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{2n+1}}{2n+1} x^{2(2n+1)} \quad \forall\, x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
(13c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln 2}{(n+1)2^{n+1}} x^{2n+2} \quad \forall\, x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
(14a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n} \quad \forall\, x \in I\!R$
(14b) $\displaystyle\ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)3^{n+1}} (x-3)^{n+1} \quad \forall\, 0 < x \le 6$

(15a) $\displaystyle\mathrm{e}^{0.2} \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{(0.2)^n}{n!}$
(15b) $\displaystyle\ln\left(\tfrac{6}{5}\right) \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}$

(16a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)} x^{4n+1} \quad \forall\, x \in I\!R$
(16b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} x^{n+1} \quad \forall\, x \in (-1, 1]$
(16c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+1)} x^{4n+1} \quad \forall\, x \in [-1, 1]$

Capítulo 8

(1a) Orden 1; lineal; homogénea.
(1b) Orden 2; lineal; no homogénea.
(1c) Orden 3; lineal; no homogénea.
(1d) Orden ; no lineal.
(1e) Orden 1; no lineal.
(1f) Orden 2; lineal; homogénea.
(1g) Orden 4; lineal; homogénea.

(2a) Sí. (2b) No. (2c) No.

(3) $y_2 = \operatorname{sen} kx; \qquad y = -3\cos kx - 3/k \operatorname{sen} kx$
(4) $y(x) = \frac{2}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} x$
(5a) $y_1 = \frac{1}{3};\ y_2 = \frac{(k|x|)^3+1}{3};\ y_3 = \frac{-(k|x|)^3+1}{3}$
(5b) $y = \sqrt[4]{\frac{4}{3}x^3 + C}$
(5c) $y = -\ln(\cos t + C)$
(5d) $y_1 = 0;\ y_2 = 1;\ x + C = \ln\left|\frac{y}{1-y}\right| - \frac{1}{y}$
(5e) $y_1 = 1;\ y_2 = -1;\ \left|\frac{1+y}{1-y}\right| = C\mathrm{e}^{2x}$
(5f) $\frac{1}{2}y - \ln(\mathrm{e}^y + 2) = t + C$
(5g) $y = (2n+1)\frac{\pi}{2}\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$

(6a) $y(x) = x^3 + Cx^2$
(6b) $y(x) = \frac{3}{2} + C\ \mathrm{e}^{-2x}$
(6c) $y(x) = \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{x} + C\ \mathrm{e}^{-x}$
(6d) $y(x) = \frac{1}{2} + C\ \mathrm{e}^{-2}\ \mathrm{e}^{x}$
(6e) $y(x) = \frac{1 + \ \mathrm{e}^{1-10x}}{10}$
(6f) $y(x) = x^3 + Cx^2$
(6g) $y(x) = x - 1 + C\ \mathrm{e}^{-x}$
(6h) $y(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\ \mathrm{e}^{-x^3}$
(6i) $y(x) = \ \mathrm{e}^{-\operatorname{sen} x}(x^2 - \pi^2)$

(7) $v(t) = \frac{gm}{k}\left(1 - \ \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right);\ \ \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{gm}{k}$

(8a) $y(t) = A\ \mathrm{e}^{-2t} + B\ \mathrm{e}^{-5t}$
(8b) $y(t) = A + B\ \mathrm{e}^{-2t}$
(8c) $y(t) = A\ \mathrm{e}^{t} + Bt\ \mathrm{e}^{t}$
(8d) $y(t) = A\ \mathrm{e}^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\ \mathrm{e}^{-t/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$
(8e) $y(t) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{e}^{\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{t}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$
(8f) $y(t) = A\cos t + Bt\cos t + C\operatorname{sen} t + Dt\operatorname{sen} t$
(8g) $y(t) = A\ \mathrm{e}^{3t} + B\ \mathrm{e}^{-t}$
(8h) $y(t) = A\ \mathrm{e}^{-4t} + Bt\ \mathrm{e}^{-4t}$
(8i) $y(t) = A\ \mathrm{e}^{-t}\cos 2t + B\ \mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen} 2t$
(8j) $y(t) = \frac{6}{7}\ \mathrm{e}^{t/2} + \frac{1}{7}\ \mathrm{e}^{-3t}$
(8k) $y(t) = A + B\ \mathrm{e}^{t} + C\ \mathrm{e}^{3t}$

(9a) $y(x) = -\frac{1}{2} + A\ \mathrm{e}^{x} + B\ \mathrm{e}^{-2x}$
(9b) $y(x) = -\frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-x} + A\ \mathrm{e}^{x} + B\ \mathrm{e}^{-2x}$
(9c) $y(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} + A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x$
(9d) $y(x) = \frac{1}{8}\ \mathrm{e}^{x}(\operatorname{sen} x - \cos x) + \ \mathrm{e}^{-x}(A\cos x + B\operatorname{sen} x)$
(9e) $y(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + A\ \mathrm{e}^{x} + B\ \mathrm{e}^{-2x}$
(9f) $y(x) = \left(\frac{1}{3}x + A\right)\ \mathrm{e}^{x} + B\ \mathrm{e}^{-2x}$
(9g) $y(x) = \left(A - \frac{1}{5}x\right)\ \mathrm{e}^{-2x} + B\ \mathrm{e}^{3x}$
(9h) $y(x) = \ \mathrm{e}^{-x}\left[\left(A - \frac{1}{2}x\right)\cos x + B\operatorname{sen} x\right]$

(10a) $y(t) = A\ \mathrm{e}^{t} \cos(\sqrt{5}t) + B\ \mathrm{e}^{t} \operatorname{sen}(\sqrt{5}t)$

(10c) $y(t) = A\ \mathrm{e}^{-3t} + Bt\ \mathrm{e}^{-3t}$