Escuela Argentina de Matemática y Biología

7 BIOMAT

HUERTA GRANDE - CORDOBA

del 1 al 5 de agosto de 2016

TEORÍA DE JUEGOS Y APLICACIONES

MARCELO KUPERMAN

FiEstIn

Grupo de Física Estadística e Interdisciplinaria

Centro Atómico Bariloche – Bariloche – Argentina

¿Qué es un juego?

Es una situación en la que compiten dos o más jugadores
(Ferguson y Gould, 1975).

Un juego es cualquier situación en la que los individuos deben tomar decisiones estratégicas y en la que el resultado final depende de lo que cada uno decida hacer (Nicholson, 1997).

Cualquier problema de toma de decisiones, donde el rendimiento (que obtiene una persona) depende no sólo de sus propias decisiones sino también de las decisiones de las otras personas que participan en el juego (Maddala y Miller, 1991).

¿Qué es un juego?

En un juego, dos o más individuos interactúan, adoptando comportamientos estratégicos

Un juego está caracterizado por dos elementos

1) El conjunto de estrategias disponibles para los jugadores

2) El payoff que recibe cada estrategia al enfrentar a cada una de las otras

Jugador 2

Jugador 1

	Piedra	Papel	Tijera
Piedra	0, 0	-1,1	1,-1
Papel	1,-1	0,0	-1,1
Tijera	-1,1	1,-1	0,0

¿Qué es la teoría de juegos?

Es una manera formal de analizar las interacciones entre agentes que se comportan estratégicamente

Es la matemática de la toma de decisiones en situaciones conflictivas

Se aplica en economía, asuntos militares, política, etología, sociología ecología y biología evolutiva

Tipos de juegos

Juegos Suma – Cero	•Lo que un jugador gana es lo que el otro pierde. Los actores sociales, económicos o políticos deben entender la naturaleza de este tipo de juego.
Simultáneo o secuencial	• Juegos Simultáneos :los jugadores juegan simultáneamente o desconocen los movimientos anteriores de otros jugadores. • Juegos secuenciales (o dinámicos): los jugadores posteriores tienen algún conocimiento de las acciones previas.
Single versus repetido	• Se juega una sola ronda • Se repite un número conocido o desconocido de veces, • Se repite infinitas veces
Información completa versus asimetrica	• Los jugadores pueden tener toda o parte de la información de los movimientos de su oponente

Elementos de un juego

Consideremos un juego en los que todos los participantes actúan simultáneamente y sin conocimiento de las acciones de otros jugadores.

Estos juegos se denominan *de forma estratégica* o de forma normal

Para cada juego, tenemos que definir
El conjunto de jugadores.
Las estrategias.
Las recompensas.

En términos más generales, también tenemos que el orden de juego y el tipo de de información (por ejemplo asimétrica, incompleta). Pero en juegos estratégicos el juego es simultáneo, por lo que hay necesidad de esto información adicional.

Elementos de todo juego

Jugadores

Individuos, empresas, grupos de personas, países, etc. Son jugadores que **toman decisiones**. Pueden **elegir** entre un conjunto de alternativas posibles

Estrategias

Son los planes de acción: decisiones previstas con respecto al futuro. Una estrategia corresponde a cada curso de acción que puede elegir un jugador.

Recompensas

Las ganancias corresponden a los rendimientos que obtiene cada jugador cuando termina el juego, representado por “matriz de pagos” o de beneficios y pérdidas.

Estrategias dominantes

ESTRATEGIA DOMINANTE

Es aquella estrategia que resulta óptima para un jugador independientemente de los que hagan su(s) adversario(s)

Ejemplo

Dos personas están jugando a un juego sencillo: A escribe en un papel "arriba" o "abajo". Al mismo tiempo B escribe independientemente "izquierda" o "derecha". Una vez hecho esto, se examinan los papeles y cada uno de ellos obtiene el resultado que se muestra en el siguiente cuadro.

		B	
		Izquierda	Derecha
A	Arriba	1;2	0;1
	Abajo	2;1	1;0

Estrategias dominantes

	Izquierda	Derecha
Arriba	1;2	0;1
Abajo	2;1	1;0

	Izquierda	Derecha
Arriba	1;2	0;1
Abajo	2;1	1;0

¿ Cuál será la estrategia dominante para el jugador A ?

Estrategias dominantes

Un juego de forma normal queda definido como un triplete $\left\langle I, (S_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I} \right\rangle$

Donde I es un conjunto finito de jugadores

S_i es el conjunto de acciones posibles para i

$s_i \in S_i$ es una acción de i

$u_i : S \to \Re$ es el payoff de i, S es el conjunto de todos los perfiles de acción

$s_{-i} = \lfloor s_j \rfloor_{j \neq i}$: acciones de los demás

$(s_i, s_{-i}) \in S$ es un perfil de estrategias

Estrategia dominante: Una estrategia $s_i \in S_i$ es dominante para el jugador *i* si

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \; \forall s'_i \in S_i \wedge \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Equilibrio de estrategia dominante: Un perfil de estrategias s∗ es el equilibrio de estrategias dominantes si para cada jugador *i* , s^i* es dominante.

Estrategias dominantes

No siempre los jugadores tienen estrategias dominantes.

Ejemplo

Dos empresas duopólicas, supongamos la empresa A y la empresa B venden productos rivales y tienen que decidir si emprenden o no una campaña publicitaria. La decisión que tome cada una afectará a la de la otra. Si la matriz de ganancia está representada por el cuadro hay estrategias dominantes.

Empresa B

Empresa A

	Hacer publicidad	No hacer publicidad
Hacer publicidad	10;5	15;0
No hacer publicidad	6;8	10;2

Estrategias dominantes

No siempre los jugadores tienen estrategias dominantes.

Si ahora la matriz de ganancias fuera como la que se presenta en la siguiente tabla ¿Seguirán teniendo estrategias dominantes las empresas?

Empresa B

Empresa A

	Hacer publicidad	No hacer publicidad
Hacer publicidad	10;5	15;0
No hacer publicidad	6;8	20;10

Estrategias dominadas

Estrategia estrictamente dominada: Una estrategia $s_i \in S_i$ es estrictamente dominada para el jugador *i* si existe $s'_i \in S_i$ tal que

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \ \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Estrategia debilmente dominada: Una estrategias $s_i \in S_i$ es debilmente dominada para el jugador *i* si existe $s'_i \in S_i$ tal que

$$u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \ \forall s_{-i} \in S_{-i}$$
$$u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \ \text{para algún } s_{-i} \in S_{-i}$$

Ningún jugador debe jugar una estrategia estrictamente dominada

La información sobre los payoff y la racionalidad resulta en una eliminación iterada de las estrategias estrictamente dominadas

Estrategias dominadas

Ejemplo 3x3:

Columna

Fila

	C1	C2	C3
F1	70,20	55,40	65,30
F2	80,21	35,10	30,50
F3	30,22	60,30	55,25

No es claro cual es el equilibrio. Eliminamos las estrategias dominadas

Estrategias dominadas

Columna

Fila

	C1	C2	C3
F1	70,20	55,40	65,30
F2	80,21	35,10	30,50
F3	30,22	60,30	55,25

C3 domina a **C1** para el jugador columna

Estrategias dominadas

Columna

Fila

	C1	C2	C3
F1	70,20	55,40	65,30
F2	~~80,21~~	~~35,10~~	~~30,50~~
F3	30,22	60,30	55,25

F2 es dominada por **F1** y **F3** para el jugador fila.

Estrategias dominadas

Columna

Fila

	C1	C2	C3
F1	70,20	55,40	65,30
F2	~~80,21~~	~~35,10~~	~~30,50~~
F3	30,22	60,30	55,25

Ahora, **C2** domina a **C3** para el jugador columna, que jugará siempre **C2**

Estrategias dominadas

Columna

Fila

	C1	C2	C3
F1	70,20	55,40	65,30
F2	80,21	35,10	30,50
F3	30,22	60,30	55,25

Por lo tanto el jugador fila elige **F3**.

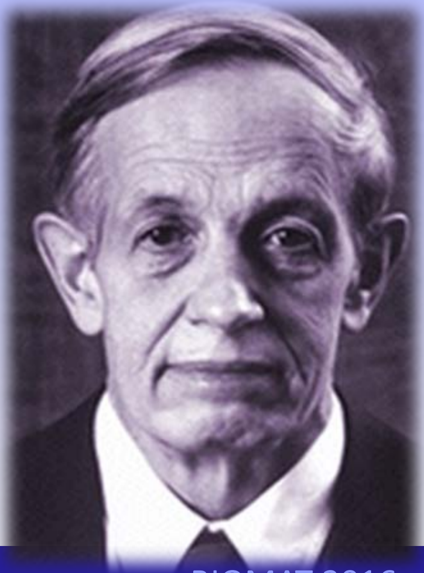
Mejor respuesta- Equilibrio de Nash

Supongamos que tenemos n jugadores.

Cada jugador *i* puede adoptar cualquiera de entre una conjunto de estrategias S_i

Una dada estrategia $s_i \in S_i$ es una mejor respuesta a la estrategia del oponente si ninguna otra estrategia de S_i produce mejor resultado

Un equilibrio de Nash es una estrategia que es la mejor respuesta a si misma, o un conjunto de estrategias que son mutuamente mejores respuestas entre si



Un equilibrio de Nash de un juego de forma normal es un perfil de estrategias (puras) si para todo *i* se cumple

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \ \forall s_i \in S_i$$

Equilibrio de Nash

Se alcanza un equilibrio de Nash cuando cada jugador elige una estrategia que es la mejor en función de lo que hacen sus adversarios. A ninguno de los jugadores le conviene apartarse de la estrategia elegida

Ningún jugador puede desviarse de manera rentable dadas las estrategias de los otros jugadores. Por lo tanto en el equilibrio de Nash, las mejores respuestas se intersecan

Dicho de otra manera, las conjeturas de los jugadores son consistentes: cada jugador *i* elige s^*_i esperando que el resto de los jugadores elija s^*_{-i}
La conjetura de jugador se verifica en un equilibrio de Nash.

Esto tiene un aire a "estado estacionario". De hecho, las dos formas de justificar Equilibrio de Nash se basan en este concepto:

Equilibrio de Nash

Columna

Fila

	Estrategia A	Estrategia B
Estrategia A	1,2	0,1
Estrategia B	$\boxed{2,1}$	1,0

(B,A) es el equilibrio de Nash.

Dado que columna juega a, la mejor respuesta de Fila es b.

Dado que fila juega b, la mejor respuesta de columna es a.

Equilibrios de Nash II

No todos los juegos tienen un único equilibrio de Nash.

Ejemplo: La guerra de los sexos

Una pareja está planeando sus vacaciones. La mujer prefiere la playa, el hombre la montaña. Ambos jugadores prefieren pasar sus vacaciones juntos a pasarlas separados. Su matriz de ganancias es:

Mujer

Hombre

	Montaña	Playa
Montaña	2,1	0,0
Playa	0,0	1,2

Equilibrios de Nash II

No todos los juegos tienen un único equilibrio de Nash.

Ejemplo: Juegos de coordinación puro

Dos compañías deben elegir que tecnología usar para sus productos compatibles. Si eligen diferentes estándares las ventas caen. Un estandar común aumentará las ventas. Sin embargo, una de las dos tecnologías es preferida por los usuarios.

		Compañía B	
		Tec 1	Tec 2
Compañía A	Tec 1	20,20	0,0
	Tec 2	0,0	5,5

Equilibrios de Nash II

Algunos juegos no tienen un equilibrio de Nash.*

Ejemplo: Cara o cruz

Jugador A / Jugador B	Cara	Cruz
Cara	1,-1	-1,1
Cruz	-1,1	1,-1

* Si solo se consideran estrategias puras

Equilibrios de Nash II

Algunos juegos no tienen un equilibrio de Nash.*

Ejemplo: Piedra, papel o tijera

Jugador B

Jugador A

	Piedra	Papel	Tijera
Piedra	0, 0	-1,1	1,-1
Papel	1,-1	0,0	-1,1
Tijera	-1,1	1,-1	0,0

* Si solo se consideran estrategias puras

Estrategias mixtas

En los casos analizados anteriormente el jugador elige un curso de acción específico (estrategia) y lo mantiene.

Ejemplo: Una empresa puede elegir aumentar la tarifa o no modificarla; un jugador puede elegir derecha o izquierda. A este tipo de estrategias se les denomina estrategias puras.

No obstante, en algunos juegos no existe un equilibrio de Nash de estrategias puras, por lo cual es indispensable ampliar el concepto de equilibrio de Nash incorporando el concepto de estrategias mixtas.

Una estrategia mixta es aquella en la que el jugador elige aleatoriamente entre dos o más opciones posibles, basándose en una distribución de probabilidades preestablecida.

Estrategias mixtas

Cada jugador juega con cierta probabilidad cada estrategia, pero quiere su ganancia sea independiente de lo que hace el otro jugador.

Jugador B

Jugador A

	p Cara	(1-p) Cruz
q Cara	1,-1	-1,1
(1-q) Cruz	-1,1	1,-1

Si **A** juega **Cara**; **B** gana –p+(1-p) si **A** juega **Cruz B** gana p-(1-p)

$p-(1-p)=-p+(1-p) \Rightarrow p=1/2$

$q-(1-q)=-q+(1-q) \Rightarrow q=1/2$

Equilibrio de Nash III

Todo juego en el cual los jugadores tienen un número finito de estrategias posibles tiene un equilibrio de Nash en términos de estrategias mixtas

En las estrategias mixtas el equilibrio de Nash es aquel en el que cada agente elige la frecuencia óptima con la que seguirá sus estrategias, dadas la frecuencia que elija el otro

Encontrar el equilibrio de Nash puede ser complicado

Estrategias evolutivamente estables

Supongamos que una población adopta una estrategia común

Por mutación o por incorporación, un individuo de la población adopta una estrategia diferente.

Si al mutante le va mejor que al resto de la población, la población lo imitará y cambiará de estrategia.

Si le va peor, el resto de la población lo ignorará

Si la población adoptó una estrategia tal que ninguna estrategia mutante pueda sacar provecho de la situación, esa estrategia se denomina **evolutivamente estable**

Estrategias Evolutivamente Estables

Cada jugador tiene a su disposición el mismo conjunto finito de estrategias puras $R = \{R_1, R_2, \ldots, R_N\}$

Con eso puede adoptar cualquier estrategia pura o mixta

$\mathbf{r}=(p_1, p_2, \ldots, p_N)$, con $p_i \geq 0$ y $\sum p_i = 1$ *(esto define un simplex)*

Matriz de pagos

$$\boxed{A = (a_{ij})}$$

a_{ij} es el pago que recibe R_i cuando juega con R_j

El pago que recibe $\mathbf{r}_1$ *cuando enfrenta a* $\mathbf{r}_2$ *es*

$$\mathbf{r}_1 A\, \mathbf{r}_2 = \sum_{i,j} p_{1i}\, p_{2j}\, a_{ij}$$

Estrategias Evolutivamente Estables

Una mejor respuesta a una estrategia $\mathbf{r}_1$ es una estrategia $\mathbf{r}_2$ tal que la $\mathbf{r}_2 A \mathbf{r}_1$ es máxima.

Si todos los jugadores tienen la misma elección de estrategias, un equilibrio de Nash es una estrategia que es la mejor respuesta a si misma

$$r_j A r_i \le r_i A r_i \quad \forall j$$

Y se llama estricto si es la única mejor respuesta, es decir

$$r_j A r_i < r_i A r_i \quad \forall j \ne i$$

La cuestión central de la teoría de juegos evolutivos es si existe un perfil de estrategias, en una población, que resulte estable frente a perturbaciones.

Es decir, que si es invadida por mutantes, estos no saquen ventaja. Supongamos que la población tiene la estrategia $\mathbf{r}_1$ *y que hay una pequeña invasión de individuos con estrategia* $\mathbf{r}_2$

$$r_j A((1-\varepsilon)r_i + \varepsilon r_j) < r_i A((1-\varepsilon)r_i + \varepsilon r_j) \quad \forall j \ne i$$

Estrategias Evolutivamente Estables

$$r_j\, A((1-\varepsilon)r_i + \varepsilon r_j) < r_i\, A((1-\varepsilon)r_i + \varepsilon r_j) \quad \forall j \neq i$$

$$(1-\varepsilon)\boxed{(r_i A r_i - r_j A r_i)} + \varepsilon \boxed{(r_i A r_j - r_j A r_j)} > 0$$

Equilibrio de Nash estricto $\quad r_i A r_i > r_j A r_i$

$$r_i A r_i = r_j A r_i \Longrightarrow$$

Estabilidad $\quad r_i A r_j > r_j A r_j$

Ecuación del Replicador

La ecuación del replicador describe la evolución de frecuencias de fenotipos en una población con selección proporcional a la aptitud (fitness)

Matriz de pagos

$$A = (a_{ij})$$

a_{ij} es el pago que recibe *i* cuando juega con *j*

Población

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$$

$$e_i = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$$

$$\sum_i x_i = 1$$

Pago de *i*

$$f_i(\vec{x}) = e_i A \vec{x}^T$$

Pago medio

$$\overline{f}(\vec{x}) = \vec{x} A \vec{x}^T$$

Dinámica del replicador

Si llamo x_i a la frecuencia del fenotipo *i*, y llamo f_i a su aptitud, la ecuación es

$$\dot{x}_i = x_i\left(f_i(\vec{x}) - \overline{f}(\vec{x})\right),$$

$$\overline{f}(\vec{x}) = \sum_i x_i f_i(\vec{x})$$

Se puede demostrar que si una estrategia es evolutivamente estable entonces es un punto estacionario estable de la ecuación del replicador

Dinámica del Replicator yEquilibrio de Nash

$$\dot{x}_i = x_i((\mathbf{Ax})_i - \mathbf{x}^T \mathbf{Ax})$$

Puntos de equilibrio : $x_i = 0$ o $(\mathbf{Ax})_i = \mathbf{x}^T \mathbf{Ax}$

$$(\mathbf{Ax})_i = \sum_i x_i (\mathbf{Ax})_i \quad \forall i / . x_i \neq 0$$

$$\Rightarrow (\mathbf{Ax})_i = (\mathbf{Ax})_j \, \forall i, j / . x_i, x_j \neq 0$$

Teoremas de tradición oral (Folk)

1)Los equilibrios de Nash son equilibrios de E.R.

2) Los límites de órbitas interiores son E.N.

3)Los puntos estables son E.N.

4) Los Equilibrios estrictos son atractores

Juegos Simétricos de 2x2

Consideremos un juego simétrico donde cada jugador tiene dos estrategias posibles

	E1	E2
E1	a,a	b,c
E2	c,b	d,d

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Consideremos una población que usa E1 con prob. x y E2 con prob. (1-x)

$$f_1 = xa + (1-x)b$$

$$f_2 = xc + (1-x)d$$

$$\overline{f} = x[xa + (1-x)b] + (1-x)[xc + (1-x)d]$$

$$\frac{dx}{dt} = x(f_1 - \overline{f}) = x(1-x)(x(a-b-c+d) + (b-d))$$

Juegos Simétricos de 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a-c & 0 \\ 0 & d-b \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overline{f} = x(a-c) + (1-x)(d-b)}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = x(f_1 - \overline{f}) = x(x(a-c) - [x^2(a-c) + (1-x)^2(d-b)]}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = x(1-x)[x(a-c) - (1-x)(d-b)] = x(1-x)[x(a-b-c+d) + (b-d)]}$$

Juegos Simétricos de 2x2

Cada jugador puede elegir entre dos estrategias posibles

	E1	E2
E1	a_1, a_1	0,0
E2	0,0	a_2,a_2

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

Consideremos una población que usa E1 con prob. x y E2 con prob. (1-x)

$$\boxed{f_1 = xa + (1-x)b}$$

$$\boxed{f_2 = xc + (1-x)d}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = x(f_1(\vec{x}) - \overline{f}(\vec{x})) = x(1-x)(xa_1 - (1-x)a_2)}$$

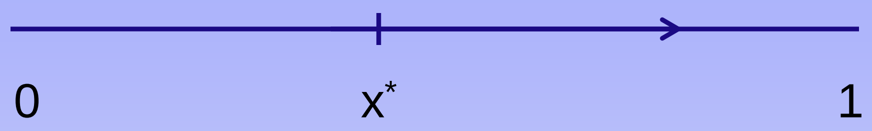
Puntos fijos $\quad \dfrac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow x = 1, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{a_2}{a_1 + a_2}$

Juegos Simétricos de 2x2

$$\dot{x}_1 = x_1(1-x_1)(x_1 a_1 - (1-x_1)a_2)$$

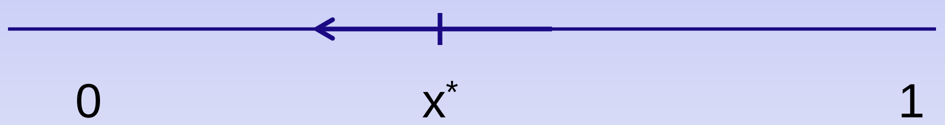
$$x_1^* = \frac{a_2}{a_1 + a_2}$$

Si $a_1 > 0$ y $a_2 < 0$, el flujo alrededor de x* , donde la derivada se anula es



$$\left| x_1^* \right| > 1$$

Si, $a_1 < 0$ y $a_2 > 0$, el flujo alrededor de x* , donde la derivada se anula es

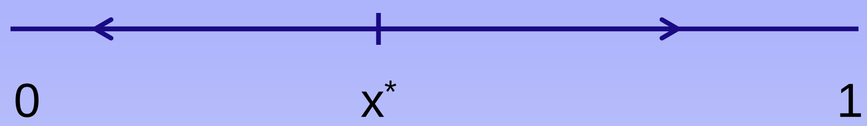


Juegos Simétricos de 2x2

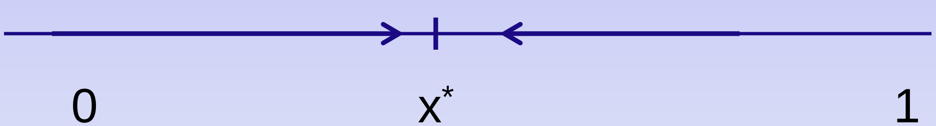
$$\dot{x}_1 = x_1(1-x_1)(x_1a_1-(1-x_1)a_2)$$

$$x_1^* = \frac{a_2}{a_1+a_2}$$

Si, $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$, el flujo alrededor de x^* , donde la derivada se anula es



Si, $a_1 < 0$ y $a_2 < 0$, el flujo alrededor de x^* , donde la derivada se anula es



Juegos Simétricos de 2x2

Quedan definidos tres (cuatro) tipos de juegos simétricos de 2x2

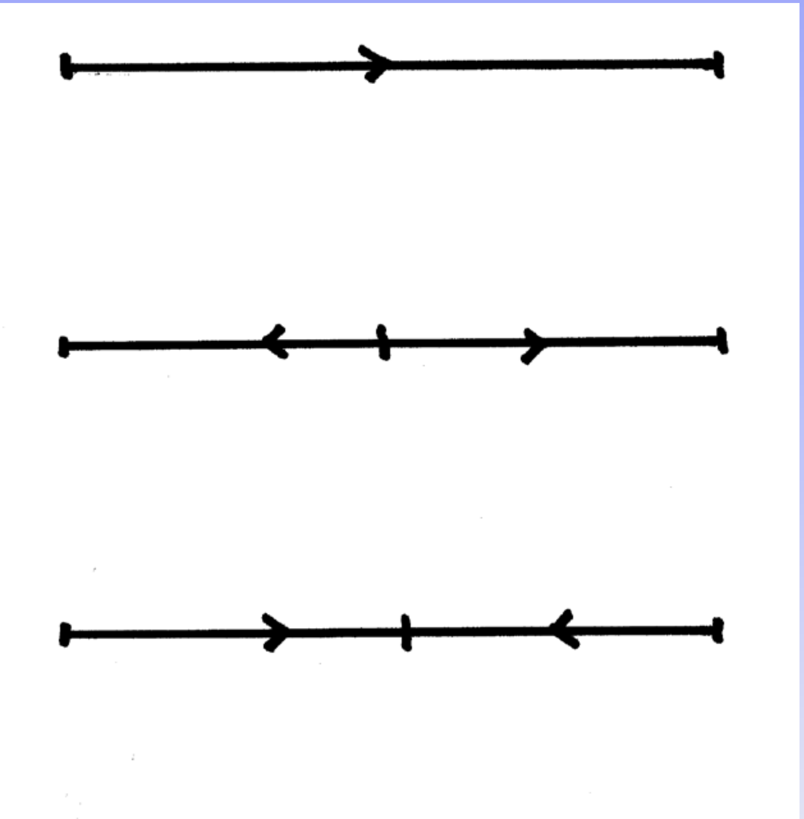
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

Juegos tipo I (IV) : $a_1 < 0$ y $a_2 > 0$ ($a_1 > 0$ y $a_2 < 0$) Dilema del prisionero

Juegos tipo II: $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$ Juegos de coordinación

Juegos tipo III: $a_1 < 0$ y $a_2 < 0$ Halcones y palomas

Juegos Simétricos de 2x2



- Dominancia
- Biestabilidad
- Coexistencia Estable

Juegos Simétricos de 2x2: Dilemas

Volvamos al juego simétrico original

	C	D
C	a,a	b,c
D	c,b	d,d

$$A = \begin{pmatrix} CC & CD \\ DC & DD \end{pmatrix}$$

C: Cooperar D: No cooperar

Dilema del prisionero $DC > CC > DD > CD$

Caza del ciervo $CC > DC \geq DD > CD$

Punto muerto $DC > DD > CC > CD$

Halcón y Paloma $DC > CC > CD > DD$

Halcones y Palomas

Dos individuos deben competir por un recurso valioso

Halcón **:**
Siempre pelea por el recurso. Si gana recibe el beneficio
Si pierde , puede ser lastimado y debe pagar el costo de la agresión

***Paloma*:**
Nunca pelea por el recurso.
Se retira si se enfrenta con un Halcón.
Divide el recurso si se encuentra con otra Paloma
No hay costo de agresión

Halcones y Palomas

Halcones y Palomas

Pagos: **B**eneficio por obtención del recurso > 0

Costo por agresión > 0 (y **C** > **B**)

	Halcón	Paloma
Halcón	$\frac{B-C}{2}$, $\frac{B-C}{2}$	B,0
Paloma	0, B	$\frac{B}{2}$, $\frac{B}{2}$

P(A,B) es el pago que recibe una estrategia **A** en una población (con estrategia) **B**

P(H, H) > P(P,H) $\Rightarrow$ ESS

P(H, H) > P(D,H) $\Rightarrow$ (B-C)/2 > 0

C < **B**, *H* es *EEE*

Halcones y Palomas

Supongamos que toda la población se comporta como **Halcón**
¿Es una Estrategia Evolutivamente Estable (EEE)?

Si $P(H, H) > P(P,H) \Rightarrow$ H es EEE

$P(H, H) > P(P,H) \Rightarrow (B-C)/2 > 0$

C < **B**, **Halcón** es EEE, si **C** > **B**, no lo es

Supongamos que toda la población se comporta como **Paloma**
¿Es una Estrategia Evolutivamente Estable (EEE)?

Si $P(P, P) > P(H,P) \Rightarrow$ P es EEE

$P(P, P) > P(H,P) \Rightarrow B/2 > B$, falso

Paloma no puede ser EEE

Halcones y Palomas

Si C > **B**, ni H ni P son evolutivamente estables

Podemos buscar una EEE entre las estrategias mixtas

Supongamos entonces que se adopta H con probabilidad ρ y P con probabilidad $(1- \rho)$

El pago por actuar como $H = \rho\, P(H,H) + (1 - \rho)\, P(H,P) = \rho[(B-C)/2] + (1 - \rho)\, B$

El pago por actuar como $P = \rho\, P(P,H) + (1 - \rho)\, P(P,P) = \rho[0] + (1 - \rho)\, B/2$

Si quiero que ni H ni P saquen ventajas $\rho[(B-C)/2] + (1 - \rho)\, B = (1 - \rho)\, B/2 \quad \Rightarrow \rho = B/C$

Halcones y Palomas

Supongamos ahora que la población adopta la estrategia mixta con ρ=B/C

Y que entra un individuo con una estrategia (α H, (1- α)P)

El pago de este individuo es

$$\alpha \frac{B}{C} P(H,H) + \alpha (1-\frac{B}{C}) P(H,P) + (1-\alpha)\frac{B}{C} P(P,H) + (1-\alpha)(1-\frac{B}{C}) P(P,P)$$

$$\alpha \frac{B}{C}\frac{(B-C)}{2} + \alpha (1-\frac{B}{C}) B + (1-\alpha)\frac{B}{C} 0 + (1-\alpha)(1-\frac{B}{C})\frac{B}{2}$$

$$\alpha \frac{B^2}{2C} - \alpha \frac{B}{2} + \alpha B - \alpha \frac{B^2}{C} + \frac{B}{2} - \alpha \frac{B}{2} + \alpha \frac{B^2}{2C} - \frac{B^2}{2C} \Rightarrow \boxed{\frac{B}{2} - \frac{B^2}{2C}}$$

No depende de α

Halcones y Palomas

Interpretación: Dos maneras de pensar la diversidad

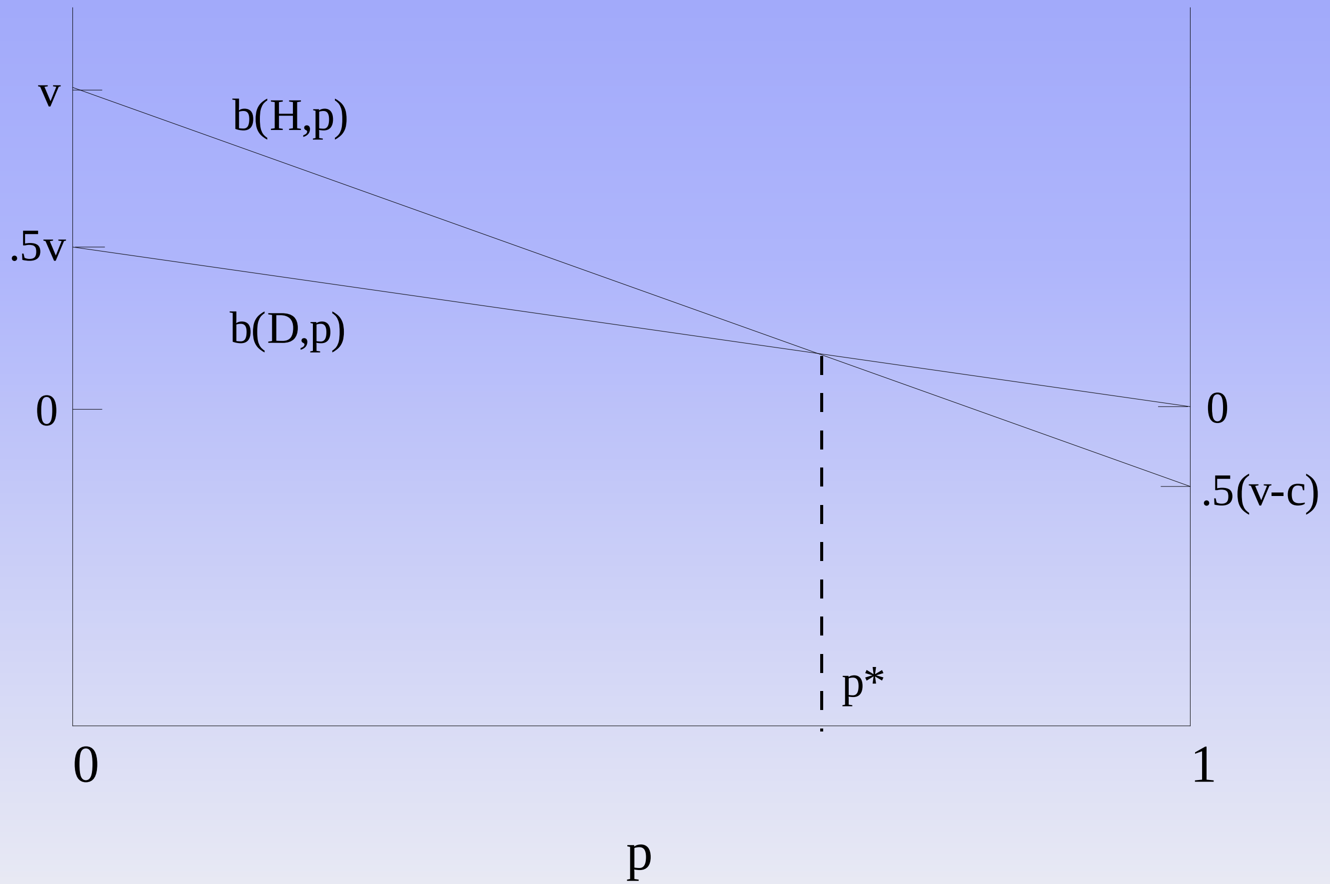
1. **Coexistencia** de individuos con dos comportamientos distintos

   La población se compone de ρ*Halcones y , $(1-\rho^{*})$ Palomas

2. Adopción de estrategias mixtas

Cada individuo tiene la misma estrategia mixta, que le hace elegir Halcón con frecuencia ρ

Halcones y Palomas



Juegos evolutivos

El comportamiento puede ser definido por ensayo y error

Adaptación y aprendizaje son factores clave

Puede relajarse la restricción de comportamiento racional

Los juegos se juegan en una población, donde cada individuo recibe un puntaje

Las estrategias que funcionan mejor que el promedio se propagan mientras que las otras desaparecen

La asignación inicial de estrategias es aleatoria

Cada jugador juega con todos sus vecinos (campo medio vs distribución espacial) y su pago es la suma de los pagos

- El éxito de cada jugador determina el número de seguidores o descendientes en el paso siguiente (**Selección**)
- Los descendientes o imitadores heredan o copian la estrategia con cierto error (**Mutación**)
- Si se alcanza el equilibrio de Nash (global) ninguna otra estrategia puede invadir

Halcones y Palomas

La matriz de pagos es la siguiente

	Halcón	Paloma
Halcón	(G-C)/2, (G-C)/2	G,0
Paloma	0, G	G/2, G/2

$$A = \begin{pmatrix} \frac{G-C}{2} & G \\ 0 & \frac{G}{2} \end{pmatrix}$$

Halcones y Palomas

Pago del Halcón

$$f_H = (1,0)A\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$$

Pago de Paloma

$$f_P = (0,1)A\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$$

Pago medio

$$\overline{f} = (x,1-x)\,A\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$$

Ecuación del replicador

$$\frac{dx}{dt} = x\left(f_H - \overline{f} \right)$$

Halcones y Palomas

Ecuación del replicador

$$\frac{dx}{dt} = x(f_H - \overline{f})$$

$$\overline{f} = x f_H + (1-x) f_P$$

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x)(f_H - f_P)$$

$$f_H = x\left(\frac{G-C}{2}\right) + (1-x)G$$

$$f_P = (1-x)\frac{G}{2}$$

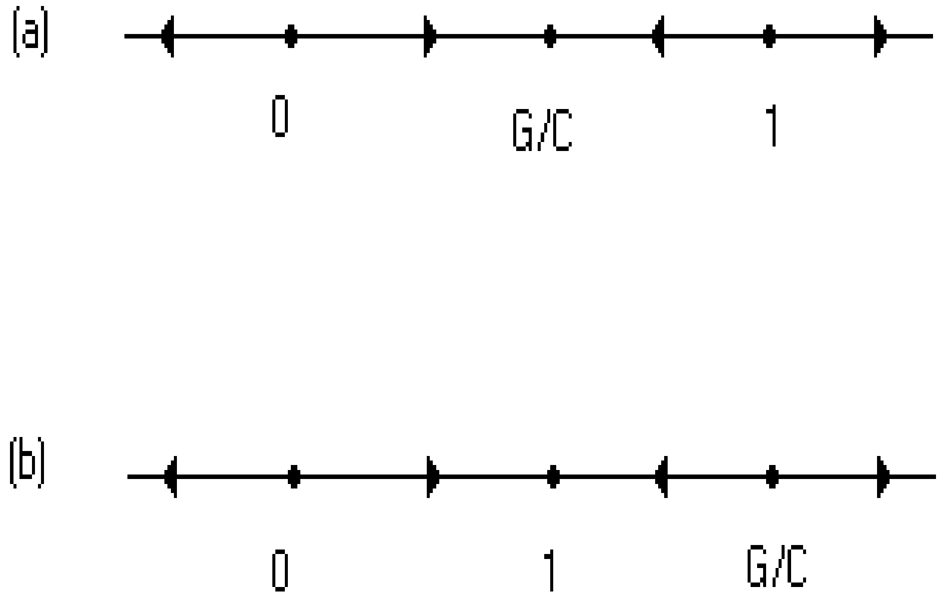
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}x(1-x)(G-Cx)$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = \frac{G}{C}$$

Espacio de las fases

G<C, equilibrio dimórfico

G>C, Halcón



$$x^* = \frac{G}{C}$$

$$x^* = 1$$

El Dilema del Prisionero

La cooperación es mucho más frecuente de los que sugieren los modelos basados en comportamiento racional

El Dilema del Prisionero

El juego:

Dos personas son detenidas, acusadas de cometer un crimen y son encarcelados en celdas diferentes.

El juez tiene ciertos indicios sobre la culpabilidad de ambos, pero decide hacer un interrogatorio planteándoles el siguiente dilema

A cada prisionero se le dice:

Te hemos arrestado junto con la otra persona por haber cometido un robo a mano armada juntos

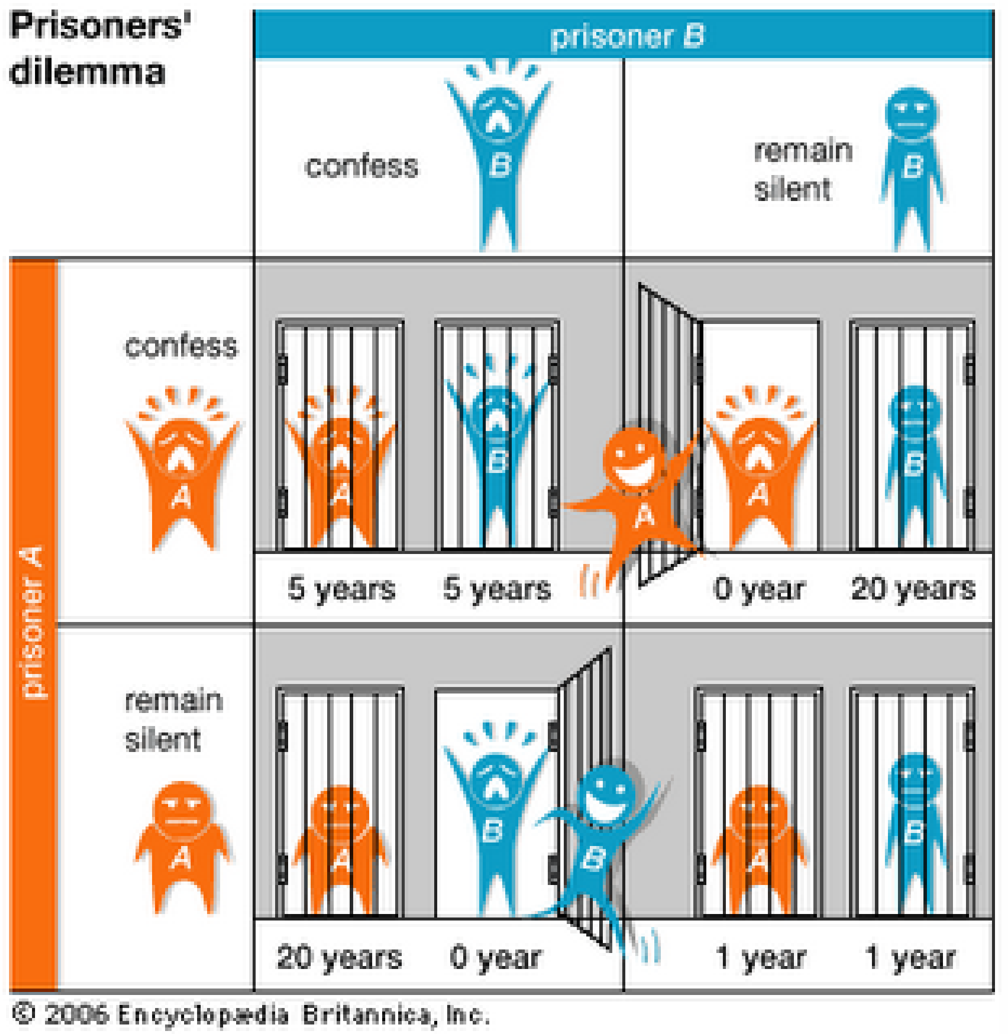
Si ambos se declaran inocentes, serán condenados a 1 años de prisión cada uno.

Si ambos acusan al otro, serán condenados a 5 años de prisión cada uno.

Si uno se declara inocente y es acusado por su compañero, será condenado a 20 años de prisión, mientras el otro se irá libre.

Llamaremos C a la estrategia "cooperativa" (declararse inocente) y D a la estrategia "defraudativa" (acusar al otro).

El Dilema del Prisionero



El Dilema del Prisionero

	Cooperar	Desertar
Cooperar	R, R	S, T
Desertar	T, S	P, P

R RECOMPENSA por cooperación mutua
S SUCKER's payoff
T TENTACIÓN para desertar
P PENALIDAD por deserción mutua

Con $T>R>P>S$ y $R > (T+S)/2$

El Dilema del Prisionero

(D) Es dominante para el jugador 1

	Cooperar	Desertar
Cooperar	R	S
Desertar	T	P

y para el jugador 2

	Cooperar	Desertar
Cooperar	R	T
Desertar	S	P

T>R
P>S

Mientras que a ambos les va mejor si el otro coopera T>P

El Dilema del Prisionero

D.P. Iterativo PD vs. P.D. simple

En las instancias simples, prima la decisión racional. Siempre desertar. Sin embargo, en el iterativo, desertar siempre no es óptimo ya que la cooperación mutua puede causar una ganancia neta en los dos agentes

Mientras que la cooperación es colectivamente el comportamiento racional, desde el punto de vista individual conviene la deserción

T > R > P > S and R > (T+S)/2. La condición R > (T+S)/2 es importante cuando el juego es repetido. Esto asegura que a los individuos les va mejor cooperando mutuamente que alternándose en cooperación y no cooperación.

La escasez de cooperación es la tragedia de los commons. Una situación en la cual varios individuos, motivados solo por el interés personal y actuando independiente pero racionalmente, terminan por destruir un recurso compartido limitado —el common— aun cuando claramente es el caso que no es en el interés de ellos —ya sea como individuos o en conjunto— que tal destrucción suceda.

Estrategias deterministas en el D.P.

Toma y daca (TFT)	• Comienza colaborando y luego hace lo que el oponente hizo la ronda anterior
Toma por cada dos dacas (TF2T)	• Es similar al *Toma y daca*, pero sólo se venga si el oponente ha desertado la dos veces anteriores
Toma y daca desconfiado (STFT)	• Similar a *Toma y daca*, pero el primer turno deserta
Sonda ingenua (SI)	• Comienza cooperando y siempre venga una deserción, pero de vez en cuando deserta espontáneamente
Sonda con remordimientos (SR)	• Similar a *sonda ingenua*, pero nunca se venga de la venganza de una de sus deserciones.
Explorador (E)	• Deserta en la primera jugada, y si su oponente responde vengándose , juega *Toma y daca* en adelante. Si su oponente no responde, alterna deserción con cooperación
Vengativo (V)	• Comienza colaborando, pero una vez que su oponente deserta, deserta siempre
Polizón (AD)	• Nunca coopera
Cooperador (AC)	• Siempre coopera

Simulaciones de juegos evolutivos

Las estrategias se distribuyen aleatoriamente entre los jugadores

En campo medio, todos juegan contra todos

Se suma la ganancia recibida en una ronda

Hay dos interpretaciones

1) Invasión

Cada individuo deja descendientes proporcionalmente a su pago acumulado (**Selección**)

Los descendientes heredan la estrategia del antecesor con algún ruido (**Mutación**)

2) Imitación

Cada jugador actualiza su estrategia en función de sus ventajas competitivas

La probabilidad de que cada elemento *v* de la vecindad 'contagie' al sitio central *c* es proporcional a

$$r = (P_v - P_c)/K, \qquad \text{con } K = \text{Cte. de normalización}$$

P_v , P_c corresponden a los beneficios acumulados por cada agente en función de sus encuentros con sus respectivos vecinos

En ocasiones la probabilidad de actualización es proporcional a la siguiente expresión: $1/(1 + \exp[-(P_v - P_f)/n])$,

n es el ruido que magnifica la relevancia del diferencial de beneficios.

Torneo de Axelrod

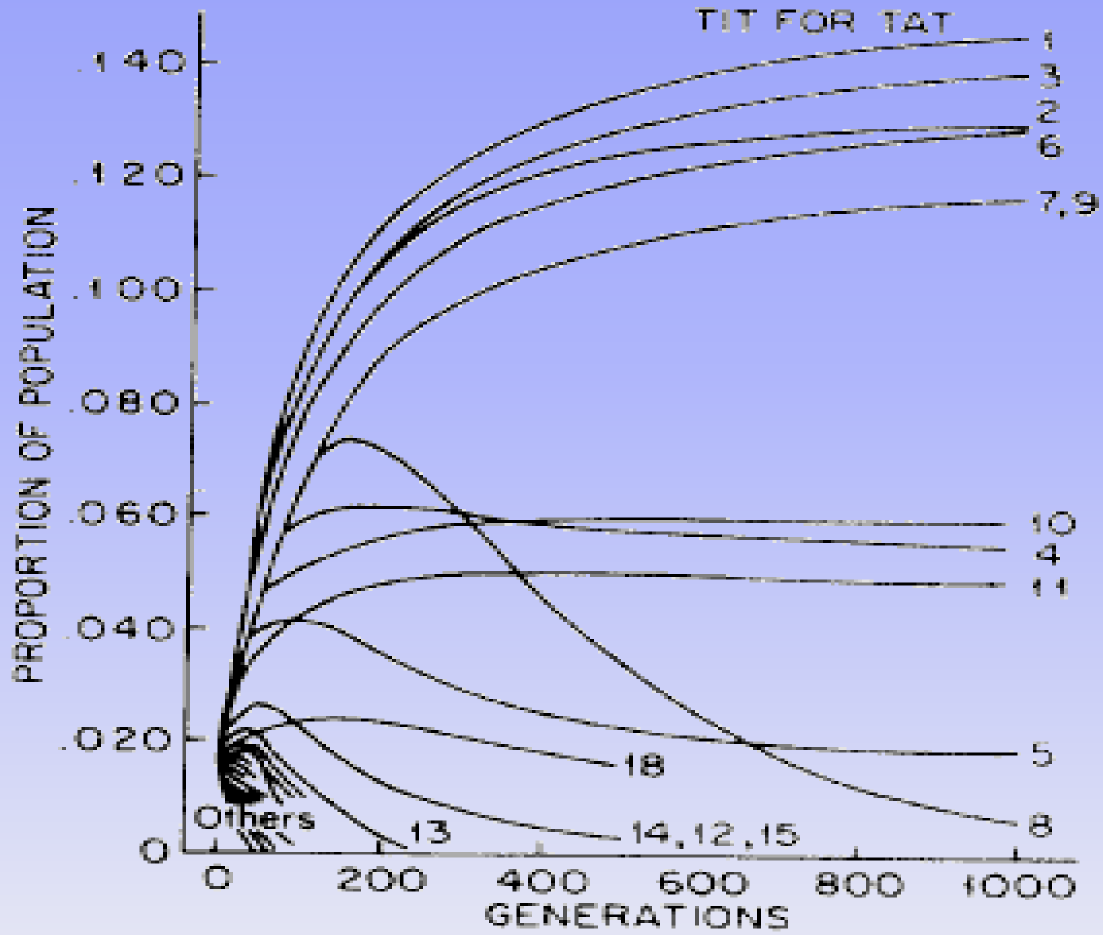
Se realizó a comienzos de los 80

Axelrod invitó a investigadores en Teoría de juegos a proponer estrategias para jugar del D. P. iterado

Cada estrategia debía competir contra todas las demás, incluida ella misma y una estrategia que aleatoriamente cooperaba o traicionaba

TFT ganó el primer torneo y el segundo, que se realizó tras haber comunicado a los competidores el resultado del primero.

Simulación ecológica del DP iterado



Definición extendida de estrategia

La estrategia no solo considera la acción del adversario sino la propia.

Hay 4 posibilidades : cc, dc, cd, dd   (adv, propia)

Se puede definir la probabilidad de cooperar según que haya sucedido en el turno anterior

La estrategia queda definida por un vector (p1, p2, p3, p4)

TFT es (1,0,1,0)

Nowak and Sigmund estudiaron la estrategia (1, 0, 0, 1) y la llamaron Pavlov

Pavlov

Coopera tras cooperación o deserción mutua

Es mejor que TF2T por perdonar

Puede explotar a los cooperadores, desertando siempre

Puede tolerar el ruido, desertando para castigar una deserción pero perdonando luego.

La debilidad que tiene es que alterna c y d con un AD y no es EEE contra un AD

Pero si se altera un poco, (.999, 0.001, 0.001, 0.995) puede sobrevivir

Hicieron 40 simulaciones, empezando con (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) durante 500,000 generaciones

- Cada 100 generaciones se introducía una nueva

Hay un transitorio caótico, tras lo cual dominan los no cooperadores.

TFT se encarga de eliminar a los desertores puros

Pero como es muy estricta es reemplazada por GTFT o Pavlov

Ejemplo real: Cardumen

Hasta ahora una representación exacta de las condiciones del dilema del prisionero no ha sido identificado en la naturaleza

La inspección del depredador en peces gregarios está cerca, pero el escenario es discutible

Un par de peces puede romper con el grupo para nadar cerca e inspeccionar al depredador persiguiendo el cardumen

Reciben un pago en forma de adquirir conocimientos sobre el depredador

Dos peces pueden moverse más cerca del depredador, por lo que se benefician de la cooperación

Además, uno puede "desertar" beneficiarse del conocimiento sin riesgo
Por lo tanto T> R> P> S está satisfecho, pero ...
¿Pueden reconocer desertores anteriores con el fin de castigarlos?
¿Realmente prefieren acercarse en pares?
¿Un inspector comparte información con el grupo?

Peces altruistas

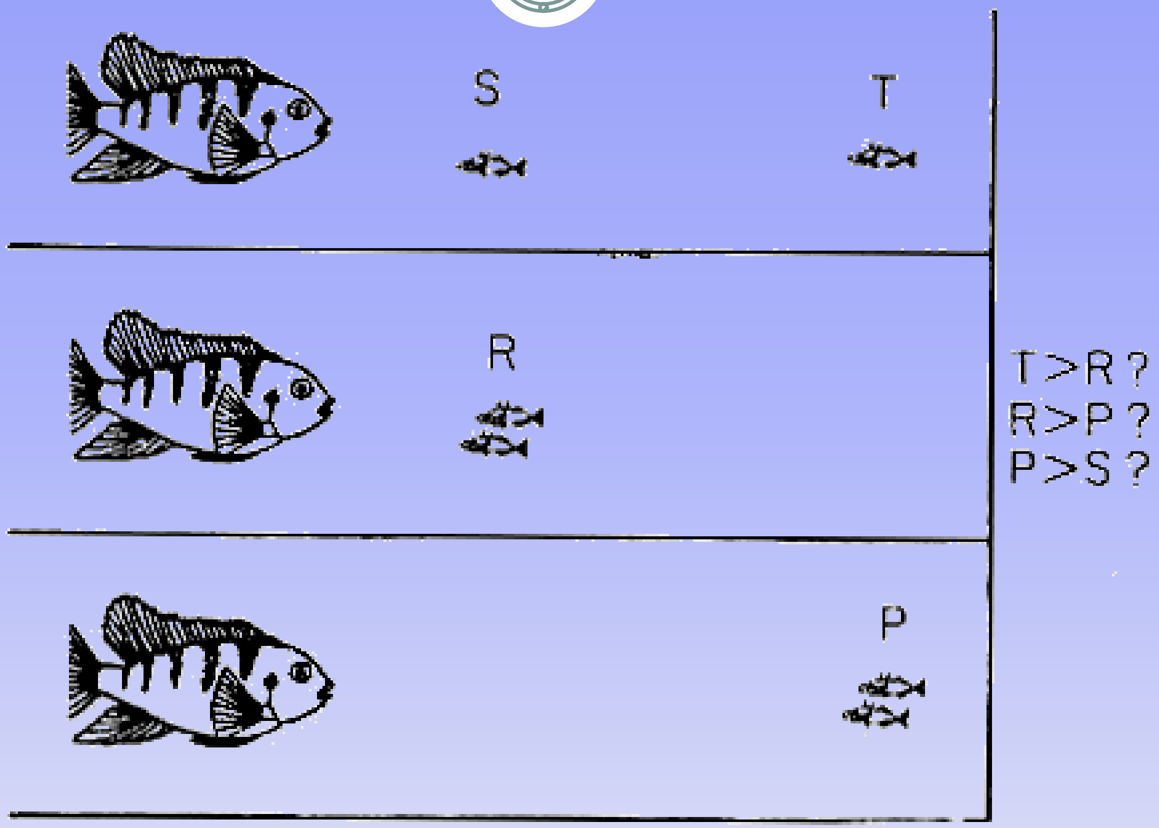


Fig. 3.8. Predator inspection behavior in pairs of fish as a possible prisoner's dilemma game. When one fish alone inspects, it receives the "sucker's" payoff (S), with its partner obtaining the "temptation to cheat" payoff (T). When both inspect, each receive the reward for mutual cooperation (R), and when neither inspects, they receive the punishment for mutual defection (P) (after Milinski, 1990).

Peces altruistas

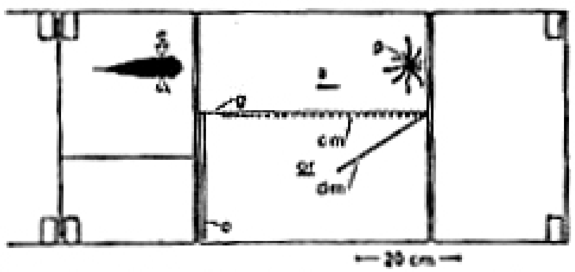


Fig. 1 Plan of the experimental equipment. The glass tanks shown contain the cichlid (c) and the plant (p), respectively. A typical position of a test stickleback (s) is also shown, as are the positions of the cooperating mirror (cm) and the defecting mirror (dm); 0, opaque screen; g, glass partition. Only one of the two mirrors was present in each experiment.

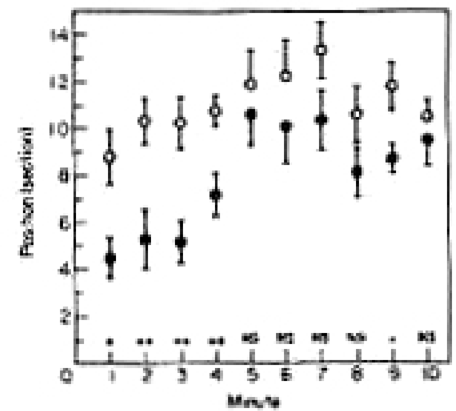


Figure 1. Guppies' mean position (section number) for each 1-min interval with the mirror parallel (○) and angled (●). Bars represent ± 1 SE (overlapping bars omitted for clarity). The results of two-tailed Wilcoxon rank sum tests for each minute are shown by $*P<0{\cdot}05$; $**P<0{\cdot}01$; and NS.

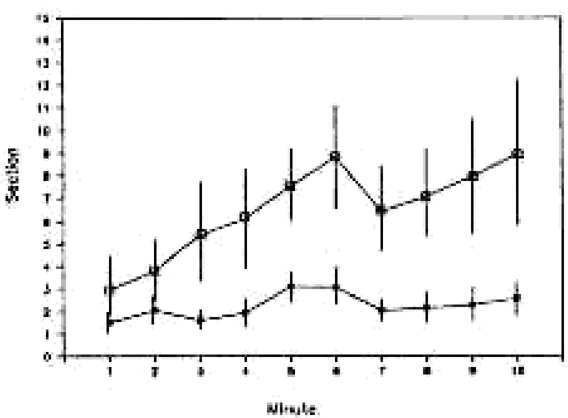


Fig. 1. Mean position (±1 SE) of a guppy during each minute of a trial

Los peces se aproximan más con espejos paralelos que con espejos oblicuos

Pero pasa lo mismo en ausencia de predador

5 reglas para la evolución de la cooperación

Payoff matrix

		C	D	
Kin selection	C	$(b-c)(1+r)$	$br-c$	*r*...genetic relatedness
	D	$b-rc$	0	
Direct reciprocity	C	$(b-c)/(1-w)$	$-c$	*w*...probability of next round
	D	b	0	
Indirect reciprocity	C	$b-c$	$-c(1-q)$	*q*...social acquaintanceship
	D	$b(1-q)$	0	
Network reciprocity	C	$b-c$	$H-c$	*k*...number of neighbors
	D	$b-H$	0	
Group selection	C	$(b-c)(m+n)$	$(b-c)m-cn$	*n*...group size *m*...number of groups
	D	bn	0	

b = beneficio
c= costo

Piedra papel o tijera

	Piedra	Papel	Tijera
Piedra	0, 0	-1,1	1,-1
Papel	1,-1	0,0	-1,1
Tijera	-1,1	1,-1	0,0

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Piedra papel o tijera

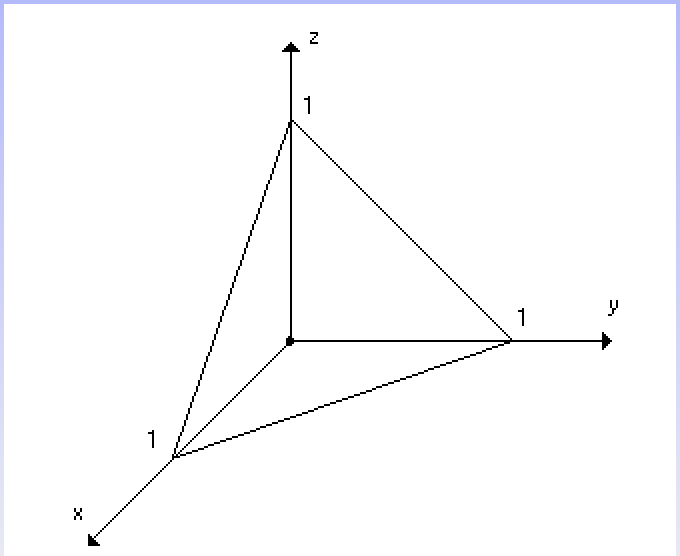
$$\frac{dx}{dt} = x(y - z)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(z - x)$$

$$\frac{dz}{dt} = z(x - y)$$

$$\frac{dx}{dt} = -x + x^2 + 2xy$$

$$\frac{dy}{dt} = y - y^2 - 2xy$$



Estabilidad local

Equilibrios

$$\frac{dx}{dt} = x(-1 + x + 2y)$$

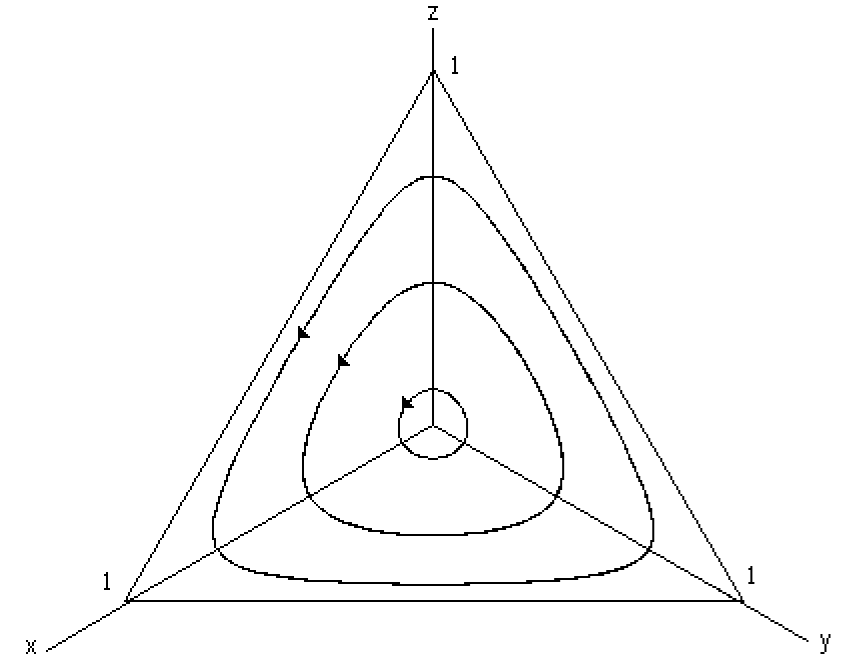
$$\frac{dy}{dt} = y(1 - y - 2x)$$

$(1,0,0)$
$(0,1,0)$
$(0,0,1)$

Saddle (ensilladura)

$$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

Centro



Estabilidad lineal

$$\frac{dx}{dt} = x(-1 + x + 2y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(1 - y - 2x)$$

$$x = x^* + \varepsilon$$
$$y = y^* + \delta$$

$$\frac{d(x^* + \varepsilon)}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} = (x^* + \varepsilon)(-1 + x^* + \varepsilon + 2(y^* + \delta))$$
$$\frac{d(y^* + \delta)}{dt} = \frac{d\delta}{dt} = (y^* + \delta)(1 - y^* - \delta - 2(x^* + \varepsilon))$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = x^*(-1 + x^* + 2y^*) + x^*(\varepsilon + 2\delta) + \varepsilon(-1 + x^* + 2y^*)$$
$$\frac{d\delta}{dt} = y^*(1 - y^* - 2x^*) - y^*(2\varepsilon + \delta) + \delta(1 - y^* - 2x^*)$$

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}, \frac{d\delta}{dt}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$a = 2(x^* + y^*) - 1$$
$$b = 2x^*$$
$$c = -2y^*$$
$$d = 1 - 2(x^* + y^*)$$

Estabilidad lineal

$x^* = 0$
$y^* = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = -1$

$x^* = 0$
$y^* = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = -1$

$x^* = 1$
$y^* = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

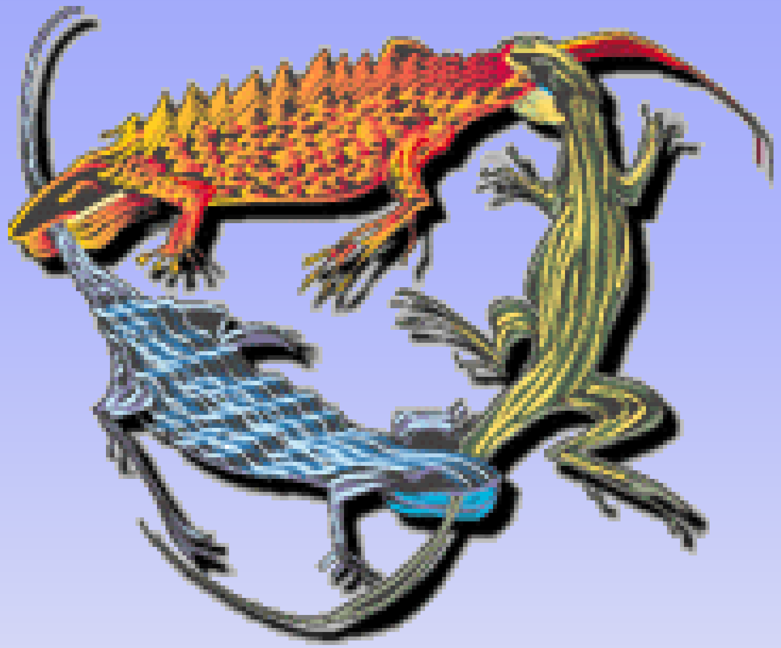
$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = -1$

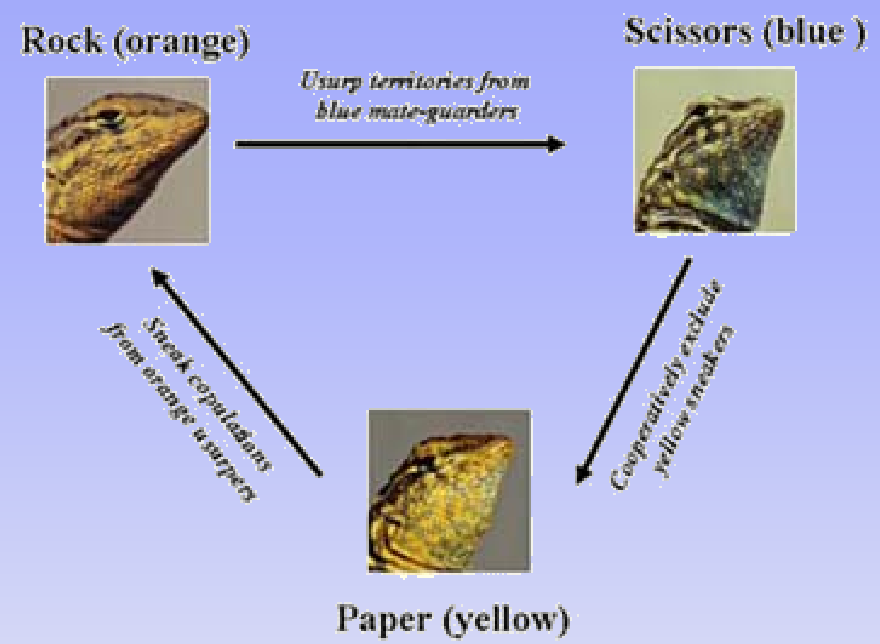
$x^* = 1/3$
$y^* = 1/3$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = i\sqrt{3}$
$\lambda_2 = -i\sqrt{3}$

Lagartos de colores



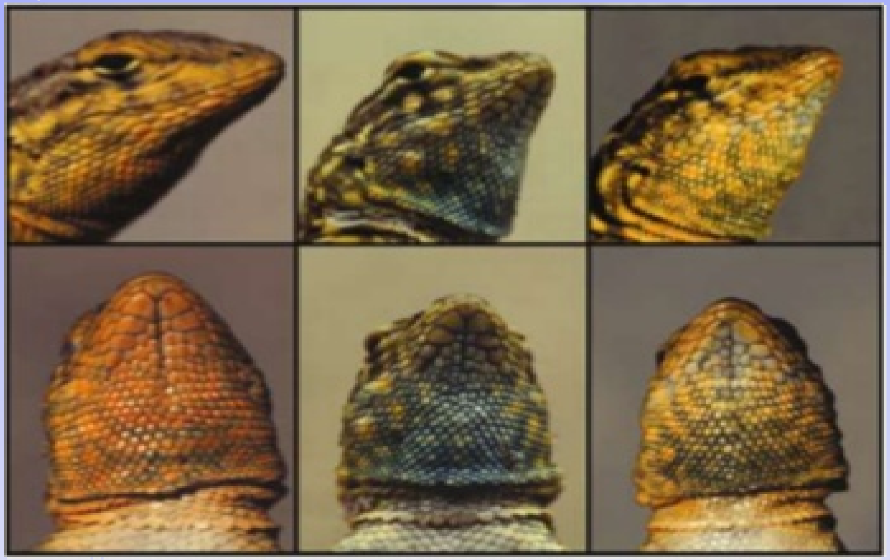


Lagartos de colores

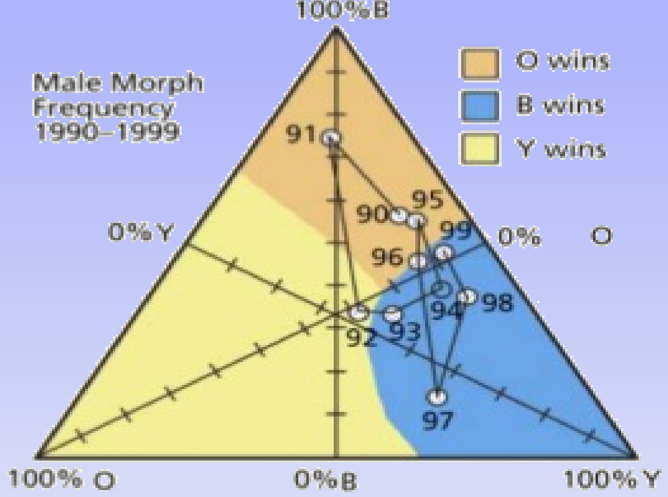
Lagartos de colores

Side-blotched lizards:
cycles of orange, blue and yellow

(a)



(b)



37

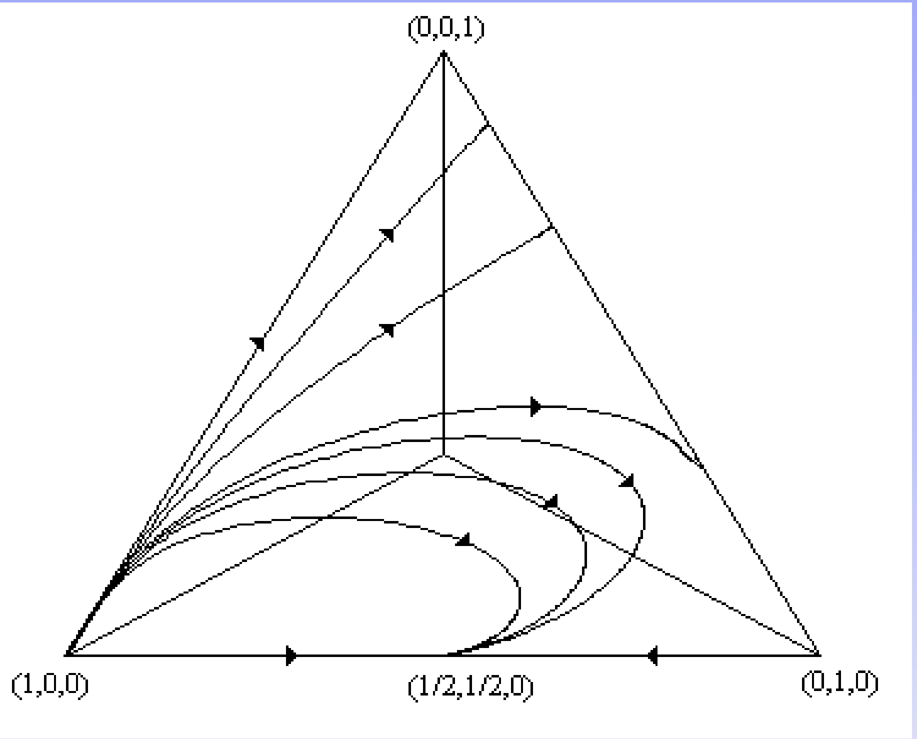
Halcones y Palomas extendido

Vengativo: se comporta como paloma frente a una paloma y como Halcón frente a un Halcón. Pelea si es llevado a pelear

	Halcón	Paloma	Vengativo
Halcón	(G-C)/2, (G-C)/2	G,0	(G-C)/2, (G-C)/2
Paloma	0, G	G/2, G/2	G/2, G/2
Vengativo	(G-C)/2, (G-C)/2	G/2, G/2	G/2, G/2

$$A=\begin{pmatrix} \frac{G-C}{2} & G & \frac{G-C}{2} \\ 0 & \frac{G}{2} & \frac{G}{2} \\ \frac{G-C}{2} & \frac{G}{2} & \frac{G}{2} \end{pmatrix}$$

Halcones , Palomas, Vengativos



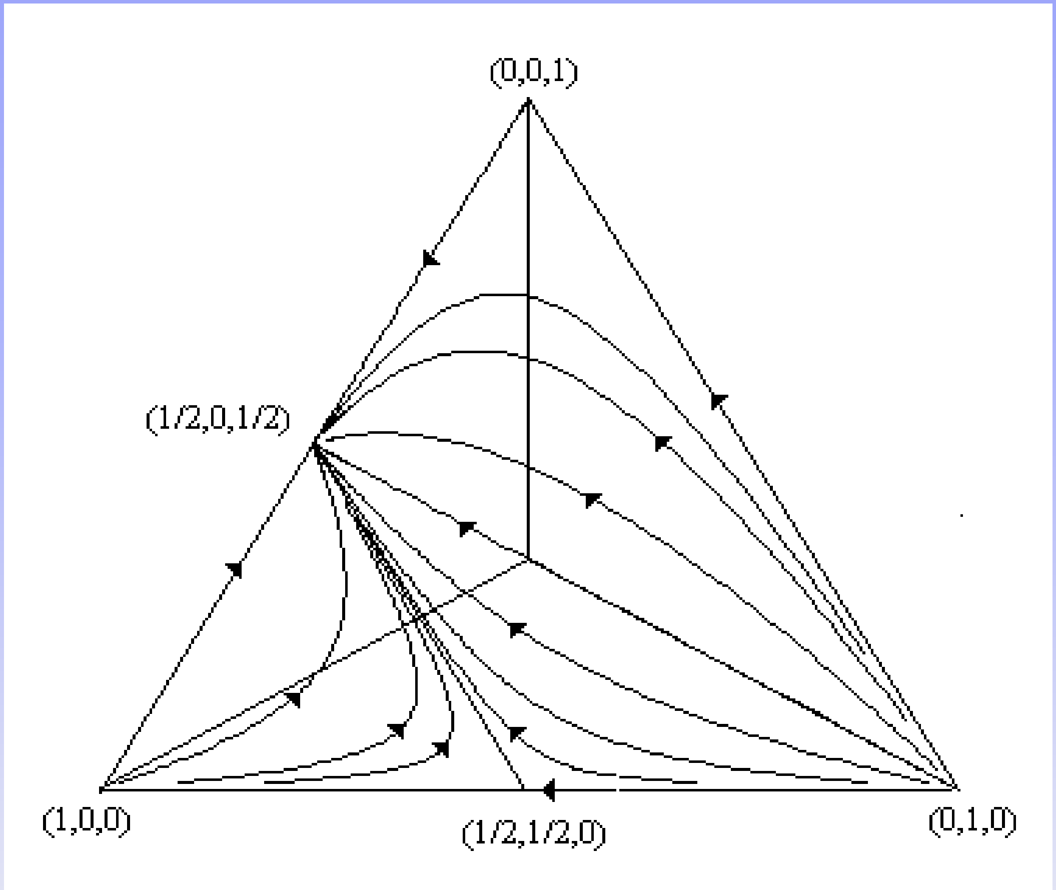
Halcones y Palomas extendido II

Bravucón : se comporta como Halcón frente a Paloma, pero se acobarda ante un Halcón. Evita la pelea si es llevado a pelear

	Halcón	Paloma	Bravucón
Halcón	(G-C)/2, (G-C)/2	G,0	G, 0
Paloma	0, G	G/2, G/2	0, G
Bravucón	0, G	G, 0	G/2, G/2

$$A = \begin{pmatrix} \frac{G-C}{2} & G & G \\ 0 & \frac{G}{2} & 0 \\ 0 & G & \frac{G}{2} \end{pmatrix}$$

Halcones , Palomas, Bravucones



Dinámica del replicador

Si llamo x_i a la frecuencia del fenotipo *i*, y llamo f_i a su aptitud, la ecuación es

$$\dot{x}_i = x_i(f_i(\vec{x}) - \overline{f}(\vec{x})), \qquad \overline{f}(\vec{x}) = \sum_i x_i f_i(\vec{x})$$

$$\dot{x}_i = x_i((Ax)_i - x^T Ax)$$

Es importante que el simplex S_N sea invariante ante la dinámica

$$S = \sum_i x_i \Rightarrow \dot{S} = \sum_i x_i(f_i(\vec{x}) - \overline{f}(\vec{x}))$$

$$\dot{S} = \sum_i x_i f_i(\mathbf{x}) - \overline{f}(\mathbf{x}) \sum_i x_i = (1\text{-}S)\overline{f}(\mathbf{x})$$

Si $S = 1 \Rightarrow \dot{S} = 0$

Dinámica del replicador

Propiedades

1. Regla del cociente

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_i}{x_j}\right)=\left(\frac{x_i}{x_j}\right)(f_i(\mathbf{x})-f_j(\mathbf{x}))$$

$$\frac{\dot{x}_i x_j - x_i \dot{x}_j}{x_j^2}=\left(\frac{1}{x_j^2}\right)\left(x_i x_j(f_i(\mathbf{x})-\overline{f}(\mathbf{x}))-x_i x_j(f_j(\mathbf{x})-\overline{f}(\mathbf{x}))\right)$$

$$=\left(\frac{1}{x_j^2}\right)\left(x_i x_j f_i(\mathbf{x})-x_i x_j f_j(\mathbf{x})\right)=\left(\frac{x_i}{x_j}\right)(f_i(\mathbf{x})-f_j(\mathbf{x}))$$

Dinámica del replicador

2. Suma escalar

La suma de una función $\Psi : S_n \to R$ a todos los f_i no altera la ecuación

$$g_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{x}), \qquad \bar{g}(\mathbf{x}) = \sum_i x_i g_i(\mathbf{x})$$

$$\bar{g}(\mathbf{x}) = \sum_i x_i \left(f_i(\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{x}) \right) = \bar{f}(\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{x})$$

$$\Rightarrow g_i(\mathbf{x}) - \bar{g}(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) - \bar{f}(\mathbf{x})$$

$$\dot{x}_i = x_i(g_i(\mathbf{x}) - \bar{g}(\mathbf{x})) = x_i(f_i(\vec{x}) - \overline{f}(\vec{x})),$$

Dinámica del replicador

3. Suma columna

La suma de una constante c_k a la columna k de $\mathbf{A}$ no altera la ecuación

$$\dot{x}_i = x_i((\mathbf{Ax})_i - \mathbf{x}^T\mathbf{Ax}) = x_i(\sum_j a_{ij}x_j - \sum_{ij} a_{ij}x_j x_i)$$

$$a_{ij} \to a_{ij} + \delta_{jk}c_k$$

$$\dot{x}_i = x_i(\sum_j a_{ij}x_j + c_k x_k - \sum_{ij} a_{ij}x_i x_j - \sum_i c_k x_i x_k)$$

$$\dot{x}_i = x_i\left(\sum_j a_{ij}x_j - \sum_{ij} a_{ij}x_i x_j\right) + x_i\left(c_k x_k - \sum_i c_k x_i x_k\right)$$

$$\dot{x}_i = x_i\left(\sum_j a_{ij}x_j - \sum_{ij} a_{ij}x_i x_j\right) + x_i\left(c_k x_k - c_k x_k \sum_i x_i\right)$$

Dinámica adaptativa

El juego contempla un espacio continuo de estrategias

La población es homogénea, todos adoptan la misma estrategia

La mutación genera variantes estratégicas cercanas a la de la población

Si el mutante es mejor que la estrategia residente, es adoptada por la población, si no es rechazada

Se usa para encontrar estrategias evolutivamente estables

Dinámica de imitación

Modelo input - output

$$\dot{x}_i = x_i \sum_j [\, f_{ij}(\mathbf{x}) - f_{ji}(\mathbf{x})] x_j$$

f_{ij} tasa de cambio $j \to i$

El simplex es invariante

$$\sum_i \dot{x}_i = \sum_i \sum_j [\, f_{ij}(\mathbf{x}) - f_{ji}(\mathbf{x})] x_i x_j$$

$$= 0$$

En general $f_{ij}(\mathbf{x}) = f((Ax)_i, (Ax)_j)$

Regla de imitación $f(u,v)$

Imitar al mejor (discontinua) $f(u,v) = \begin{cases} 0 \text{ si } u < v \\ 1 \text{ si } u > v \end{cases}$

$f(u,v) = \varphi(u - v)$ monótona creciente

$\psi(u) = \varphi(u) - \varphi(-u)$

$$\Rightarrow \dot{x}_i = \sum_j x_j \psi\big((\mathbf{Ax})_i - (\mathbf{Ax})_j\big)$$

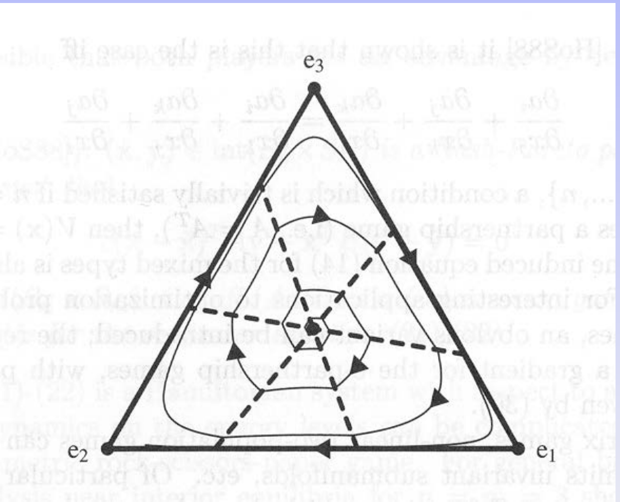
Dinámica de imitación

Otra posibilidad

$$\dot{x}_i = x_i[\, f((\mathbf{Ax})_i) - \bar{f}\,]$$

$$f_{ij} = \begin{cases} f((\mathbf{Ax})_i) & \text{se imita en función del éxito del imitado} \\ -f((\mathbf{Ax})_j) & \text{se imita en función del fracaso del imitador} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_2 & b_3 \\ b_1 & 0 & -a_3 \\ -a_1 & b_2 & 0 \end{pmatrix}$$



Dinámica de selección monótona

La forma más general

$$\dot{x}_i = x_i g_i(\mathbf{x})$$

con $\sum x_i g_i(\mathbf{x}) = 0$ para $\mathbf{x} \in S_n$

Se dice que la dinámica es payoff monótona si a mayor payoff mayor reproducción

$$g_i(\mathbf{x}) > g_j(\mathbf{x}) \Leftrightarrow (\mathbf{Ax})_i > (\mathbf{Ax})_j$$

Eliminación de estrategias dominadas

i es estrictamente dominada si $\exists\ \mathbf{y} \in S_n$ t.q.

$$(\mathbf{Ax})_i < \mathbf{y}^T \mathbf{Ax} \quad \forall \mathbf{x} \in S_n$$

Los jugadores racionales eliminan i

Al eliminar una estrategia otras puedes pasar a ser domindadas

Ejemplo $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ 2 dominada $\Rightarrow$ 3 dominada

Distribución espacial

En los juegos espaciales los jugadores interactúan con sus vecinos cercanos y adoptan el estado que resulta más conveniente.

Con los juegos espaciales se puede introducir la importancia de la topología social (redes complejas) y la racionalidad acotada (expectativa en base a conjeturas locales) para describir como un comportamiento cooperativo se propaga en la población.

En modelos donde se consideran redes complejas, los cooperadores pueden invadir a los desertores.

Distribución espacial

La frecuencia de los encuentros entre estrategias de la misma naturaleza puede ser mayor cuando existe una topología de interacción

En el mundo real (individuos, empresas, naciones, especies) las interacciones dependen del posicionamiento geográfico y social

La evolución de las especies requiere del aislamiento geográfico

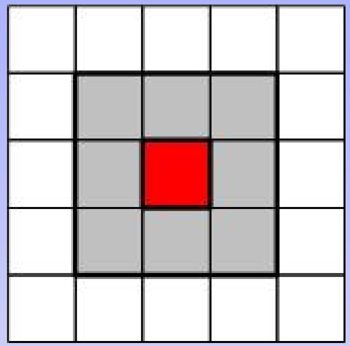
La heterogeneidad cultural, la co-existencia de la cooperación y el oportunismo se pueden explicar a partir de juegos evolutivos espaciales

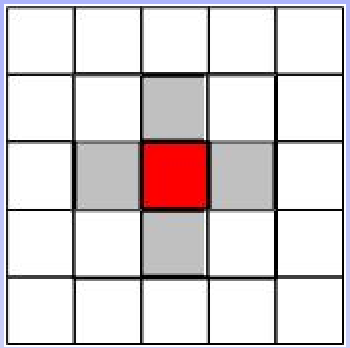
Distribución espacial

La topología de interacción se puede describir a través de un grafo o red

En un juego espacial los estados de los agentes son las estrategias o atributos que condicionan su comportamiento

Primeros modelos: redes cuadradas





Moore: el sitio central juega 8 veces por período

Von Neumann: 4 veces por período

Distribución espacial

La regla de transición define como se modifican los estados a través del tiempo

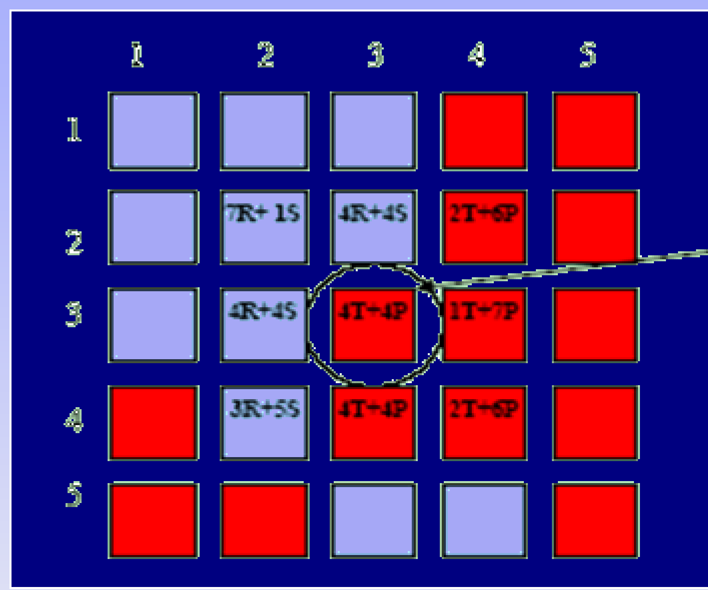
Se habla de actualización sincrónica cuando en la misma generación todos los agentes tienen posibilidad de cambiar, y de actualización asincrónica sólo cuando un subconjunto de sitios lo hace.

Ejemplo

Los sitios adoptan comportamiento C (azul) o D(rojo)

Consideremos un vecindario de Moore (primeros 8 vecinos)

El sitio central adopta en el paso siguiente, la estrategia del agente de su vecindad que acumula los mayores beneficios



El sitio (2,2) tiene el beneficio acumulado mayor $\Rightarrow$ el sitio central (3, 3) cambia de rojo a azul

Propagación de la deserción

Dependiendo del valor de b pueden existir cuatro escenarios de transición cuando se parte de un oportunista insertado en un mar de cooperadores, siempre se expande a un bloque 3 x 3 de cooperadores y luego

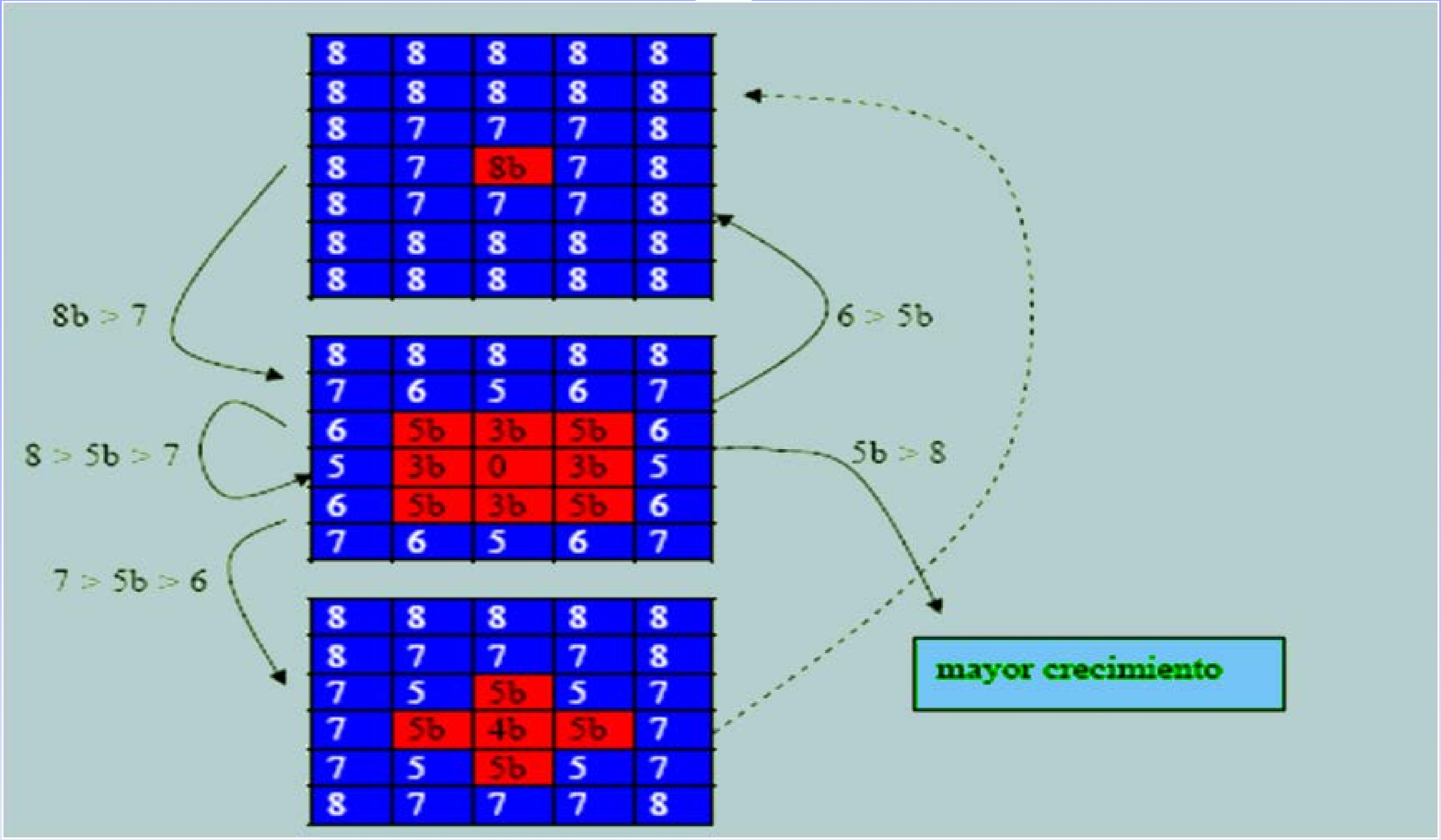
(i) regresa al estado del bloque inicial

(ii) quedarse ahí indefinidamente

(iii) crea un cluster en forma de cruz y regresa al estado inicial

(iv) propaga el oportunismo

Propagación de la deserción



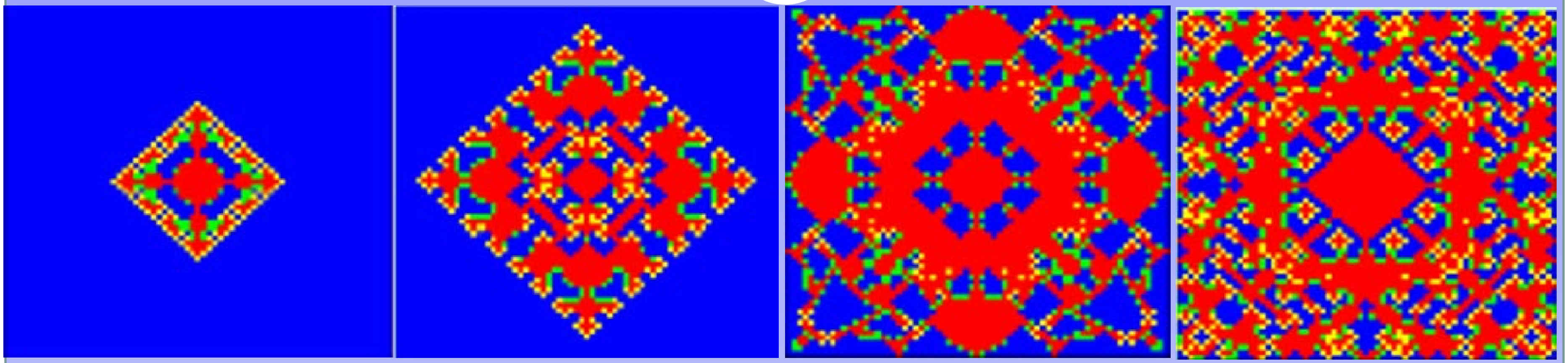
Propagación de la cooperación

Un cooperador en un mar de oportunistas no se puede expandir

Sólo se pueden propagar si se insertan en un cluster, por ejemplo para $b < 3/2$ se puede iniciar con un cluster 2 x 2, que pasa en el siguiente periodo a uno 4 x 4, y luego a uno 6 x 6.

Los juegos espaciales permiten mostrar la co-existencia de cooperación y oportunismo, ilustran en detalle la dinámica de transición que asemeja a formas fractales y a un caleidoscopio en continuo movimiento

Estructuras en un juego espacial



Cooperadores

No Cooperadores

NC $\rightarrow$ C

C $\rightarrow$ NC

Efectos topológicos

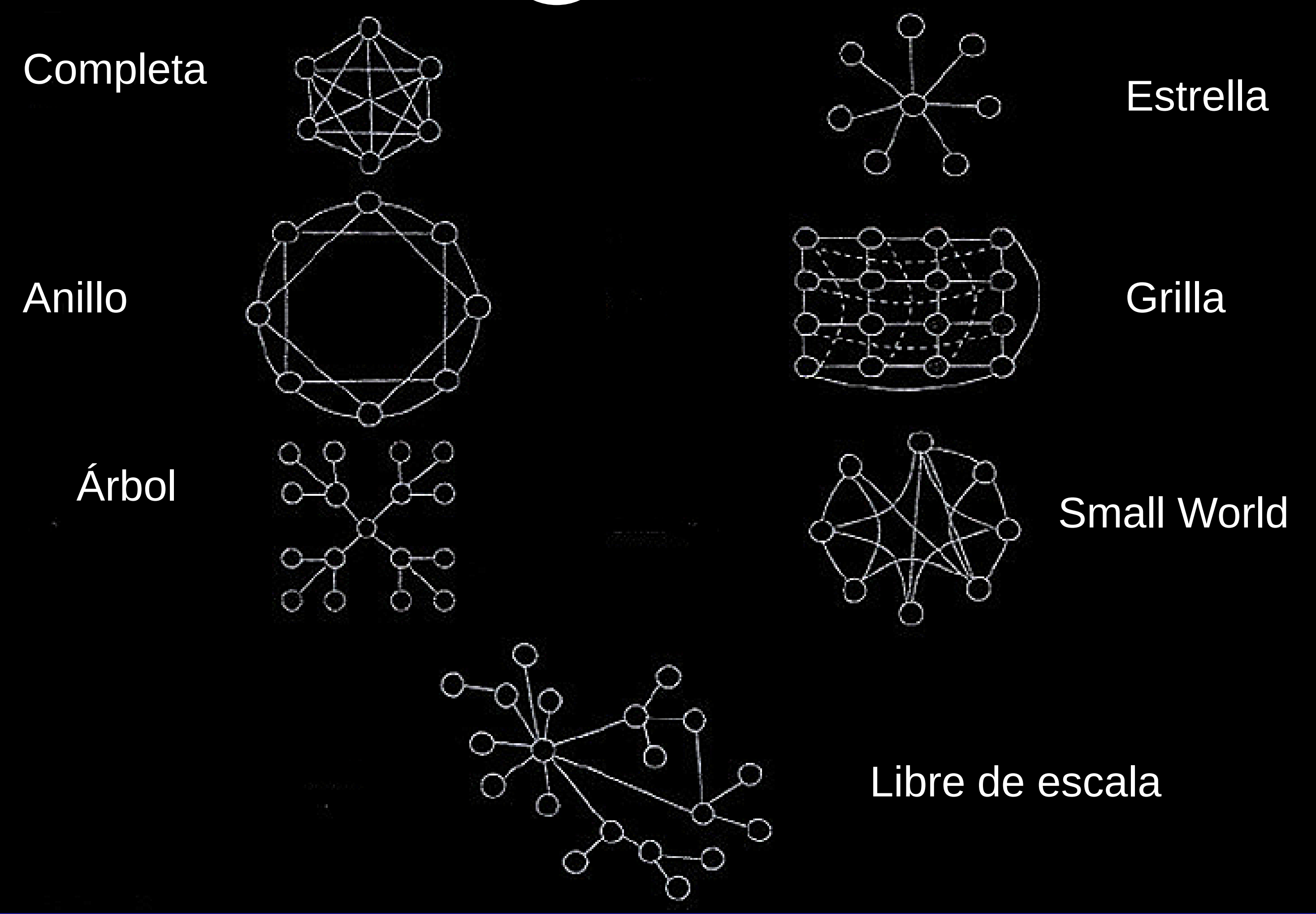
Juegos espacialmente extendidos permite estudiar como los vínculos afectan las interacciones sociales y comerciales,

Redes son muy flexibles para describir topologías

La red se considerar fija cuando la estructura de interacción se puede considerar como dada mientras que los jugadores eligen sus estrategias

En una topología endógena es posible precisar los mecanismos que producen modificaciones en su configuración

Efectos topológicos



Efectos topológicos

	Synchronous updating		Asynchronous updating	
	Proportion cooperating	Rounds to steady-state	Proportion cooperating	Rounds to steady-state
Complete	no cooperation	1	no cooperation	27.2 (4.19)
Star	P(all Cs) = ½ P(all Ds) = ½	1	P(all Cs) = ½ P(all Ds) = ½	27.3 (4.10)
Ring	0.967 (.0075)	189.2* (57.45)	0.998 (0.0010)	very large number of rounds
Grid	0.358 (0.071)	no steady state	0.538 (0.071)	no steady state
Tree	P(all Cs) = 0.6 P(all Ds) = 0.4	14.4 (1.12)	0.894 (0.003)	no steady state
Small-world	0.713 (0.021)	150.2* (96.79)	0.700 (0.014)	no steady state
Power	0.947 (0.011)	20.5 (5.22)	0.944 (0.012)	58.4 (13.0)

Erdös y Renyi

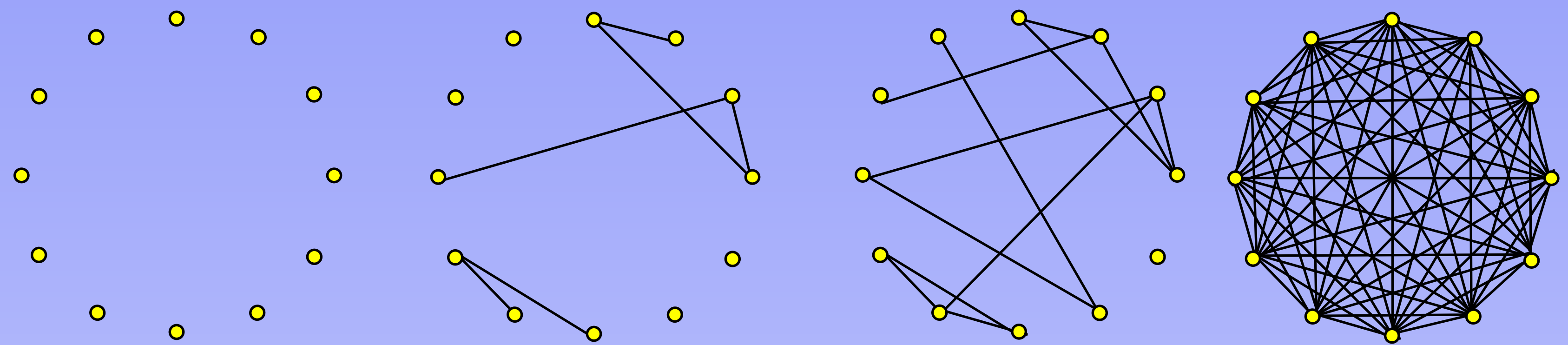
Erdős, P.; Rényi, A. (1959). "On Random Graphs. I.". Publicationes Mathematicae 6: 290–297

Hay dos variantes del modelo Erdős - Rényi (ER) para grafos aleatorios .

En el modelo de G (n,m) se elige aleatoriamente un grafo cualquiera entre los que tienen n nodos y m vínculos .

En el modelo G (n, p) , el grafo se construye mediante la conexión de los nodos al azar . Cada posible vínculo entre dos nodos se incluye en el grafo con probabilidad *p.*

Modelo de Erdos y Renyi



p=0, <k>=0 | p=0.045, <k>=0.5 | p=0.09, <k>=1 | p=1, <k>=n=12

Tamaño de la mayor componente conexa:

1	5	11	12

Diámetro de la mayor componente:

0	4	7	1

Distancia promedio entre nodos conectados:

-	2	4.2	1

E-R: Distribución de grado

Distribución binomial: un nodo puede tener un dado link, de entre los N-1 posibles con probabilidad *p*

$$p_k = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

Si N es grande, entonces se puede aproximar a una Poisson

$$P(k) \simeq e^{-pN}\frac{(pN)^k}{k!} = e^{-\langle k\rangle}\frac{\langle k\rangle^k}{k!}.$$

Donde $p = \dfrac{<k>}{N}$

Distancia promedio

La distancia L entre dos nodos es la longitud del camino más corto entre ellos.

En una malla regular $\langle L \rangle \sim n^{1/d}$.

En ER, $L \sim (\log n)/(\log k)$

Esto coincide con lo observado en la mayoría de las redes reales (efecto "small world”).

Clustering

En muchas redes reales, se observa transitividad: si A y B son vecinos de C, suelen ser vecinos entre sí.

Hay más de una forma de medir esto. Las dos más típicas:

- Sea a_i la cantidad de posibles triángulos que incluyen al nodo i (si su grado es d_i, $a_i=d_i(d_i-1)/2$).

- Sea b_i la cantidad de triángulos que incluyen al nodo i.

$C^{(1)} = \langle b_i\rangle/\langle a_i\rangle$ $C^{(2)} = \langle b_i/a_i\rangle$ el más usado

Small World

Stanley Milgram, 1967:

Experimento de envío de cartas entre desconocidos (de Nebraska a Boston).

- La gente tenía que enviarle la carta a alguien conocido
- El 20% de las cartas llegó.
- Cantidad promedio de pasos: 5.2.

Seis grados de separación

Premisas del estudio

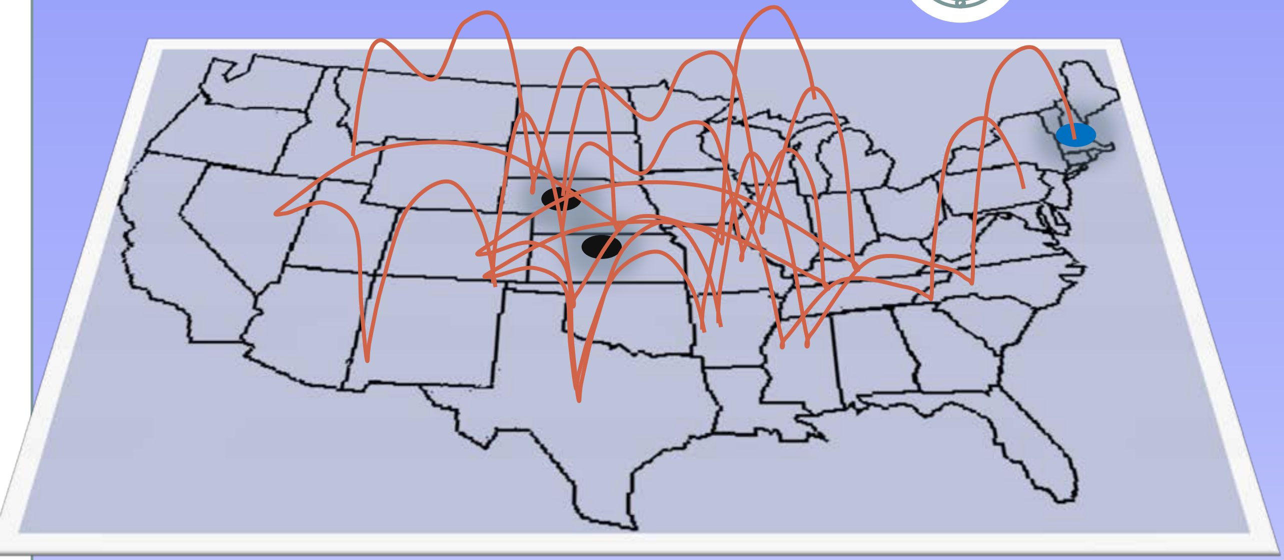
1. ADD YOUR NAME TO THE ROSTER AT THE BOTTOM OF THIS SHEET, so that the next person who receives this letter will know who it came from.

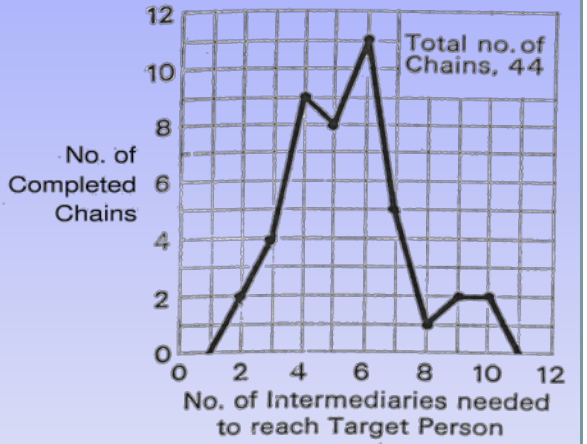
2. DETACH ONE POSTCARD. FILL IT AND RETURN IT TO HARVARD UNIVERSITY. No stamp is needed. The postcard is very important. It allows us to keep track of the progress of the folder as it moves toward the target person.

3. IF YOU KNOW THE TARGET PERSON ON A PERSONAL BASIS, MAIL THIS FOLDER DIRECTLY TO HIM (HER). Do this only if you have previously met the target person and know each other on a first name basis.

4. IF YOU DO NOT KNOW THE TARGET PERSON ON A PERSONAL BASIS, DO NOT TRY TO CONTACT HIM DIRECTLY. INSTEAD, MAIL THIS FOLDER (POST CARDS AND ALL) TO A PERSONAL ACQUAINTANCE WHO IS MORE LIKELY THAN YOU TO KNOW THE TARGET PERSON. You may send the folder to a friend, relative or acquaintance, but it must be someone you know on a first name basis.

Seis grados de separación





In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

Small World

En un anillo de N nodos, se conecta cada uno con sus k/2 vecinos a izquierda y derecha.

Se recorre el anillo (dando la vuelta) en un sentido elegido.

Para cada nodo, para cada arista que lo conecta con un vecino a la derecha, con probabilidad *p* se reemplaza ese vecino por uno escogido al azar.

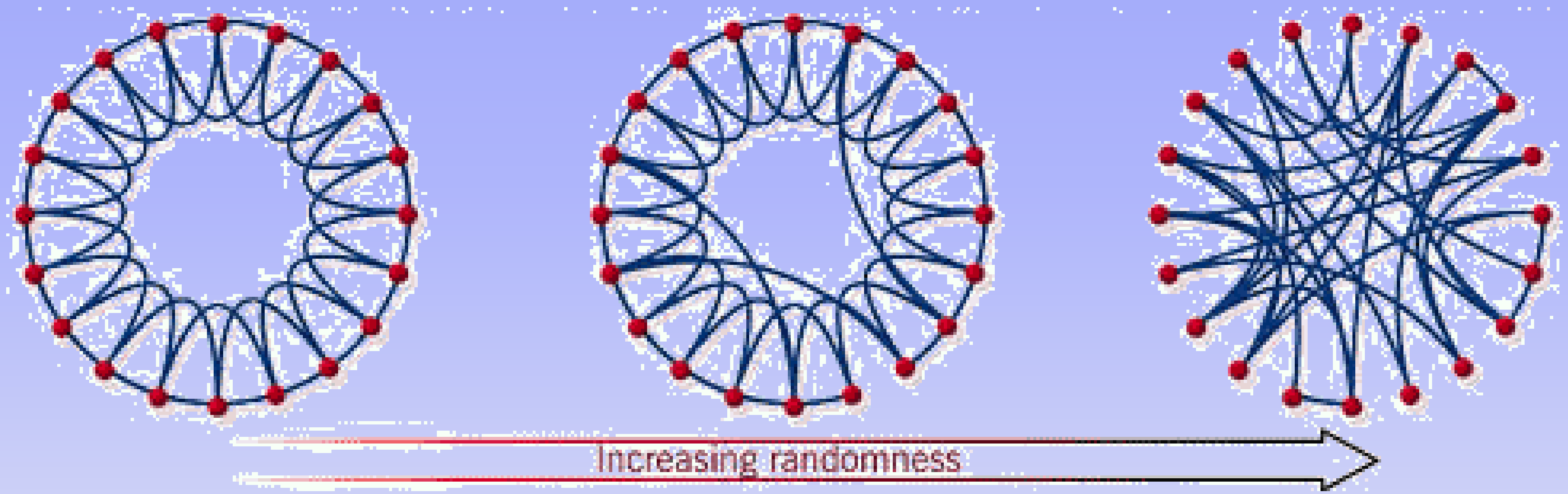
No se admiten loops ni aristas repetidas.

Duncan J. Watts & Steven H. Strogatz,

Nature 393, 440-442 (1998)

Small World

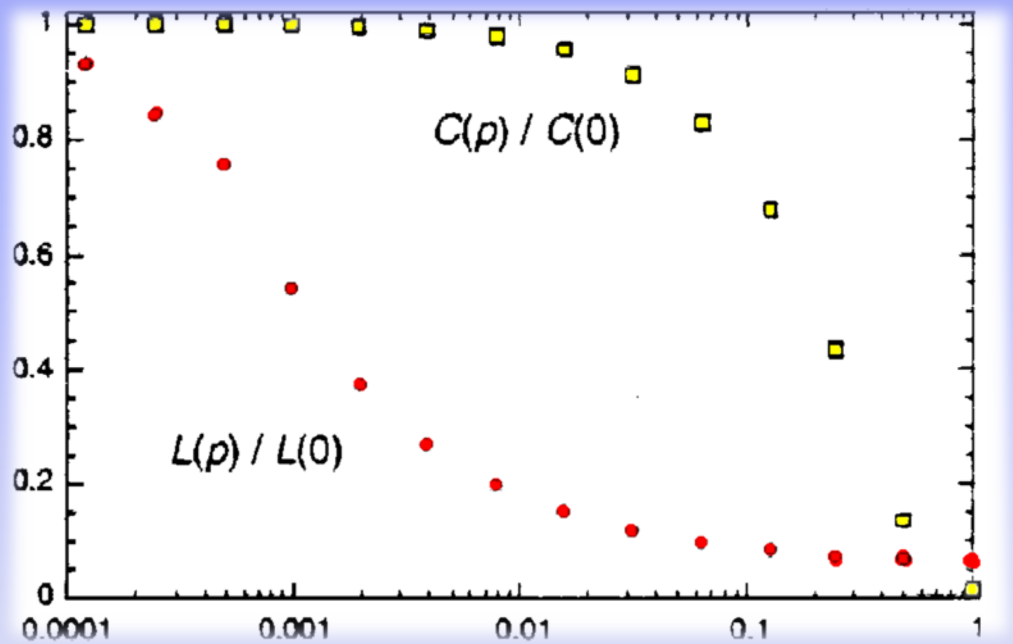
Modelo de small world de Watts & Strogatz (1998): parte con una malla regular, y modifica aristas (randomizándolas) con probabilidad p.

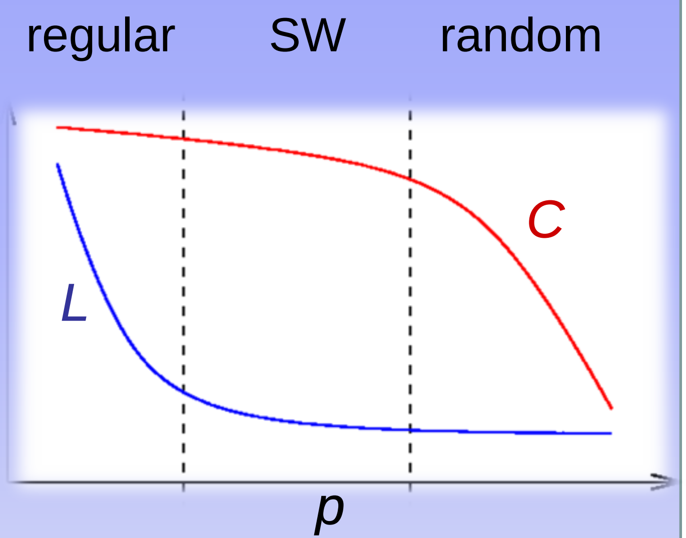


N = 1000 k =10	**N =1000 k = 8-13**	**N =1000 k = 5-18**
D = 100 L = 49.51	**D = 14 L = 11.1**	**D = 5 L = 4.46**
C = 0.67	**C = 0.63**	**C = 0.01**

Small World

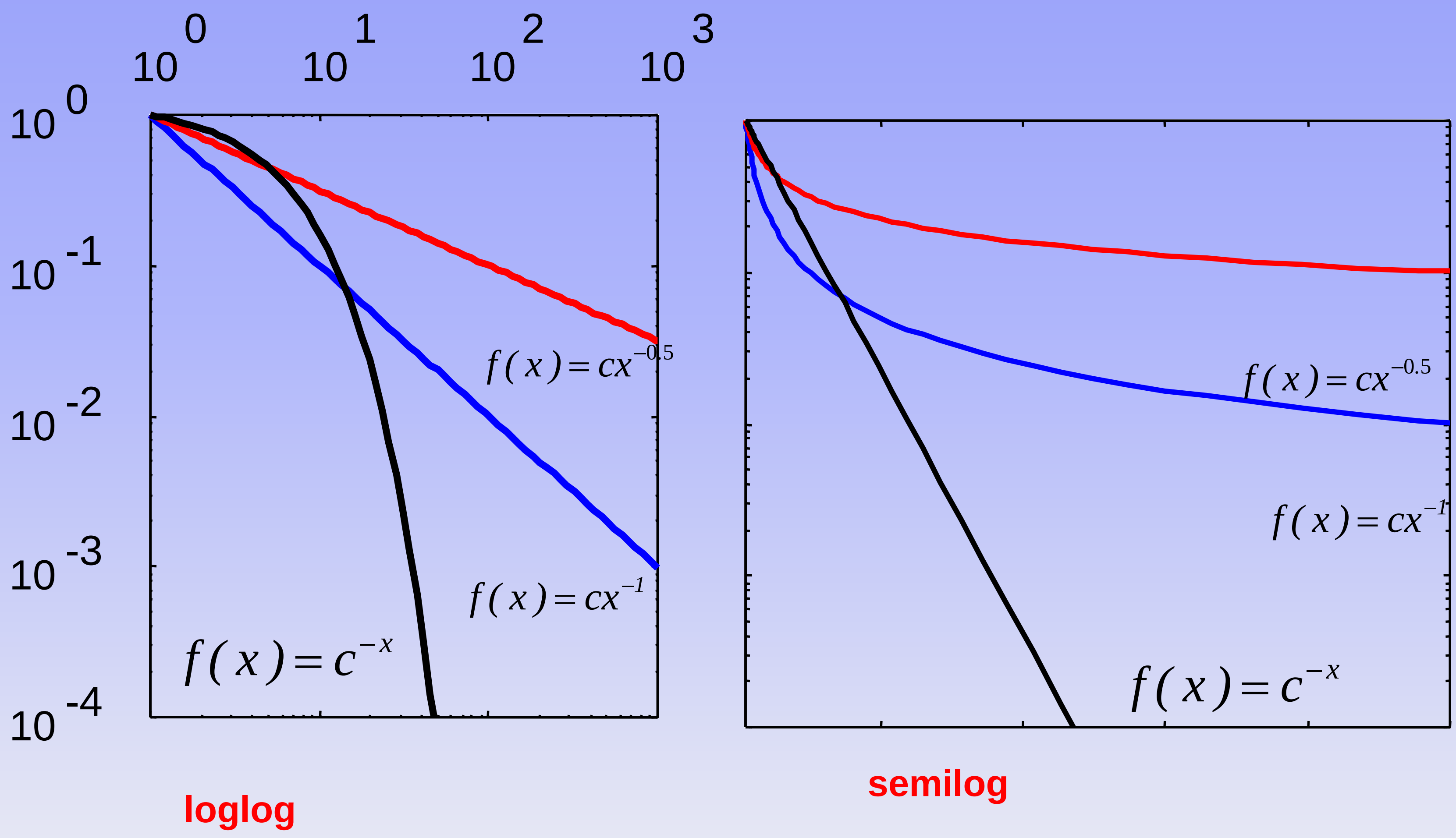
Comparte el pequeño diámetro de ER, pero también el alto clustering de lo regular.





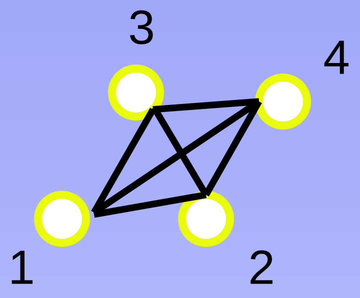
NOTA: con p=1, el grafo *no es lo mismo* que ER; en particular, el grado promedio es *exactamente* k. Pero se comporta muy parecido.

Distribución exponencial vs. SF



Modelo BA

1. Empezamos con un conjunto de m_0 nodos completamente conectados $m_0 = 4$



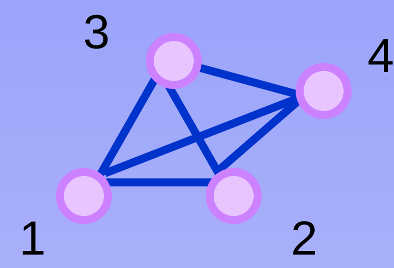
2. Luego agregamos nuevos nodos, que contribuyen con m links, uno por uno

3. Cada nuevo link se conecta a un nodo de la red con una probabilidad proporcional al número de links que este nodo tenía

Asociación preferencial: El rico se hace más rico

Modelo BA

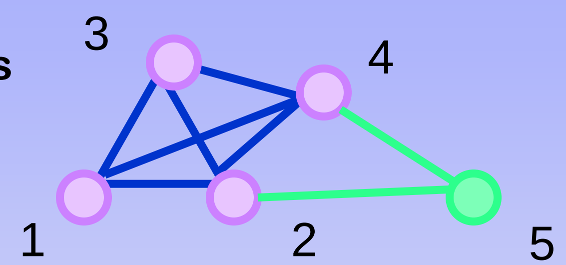
1. **Al principio, cada nodo tiene un mismo número de links. La probabilidad de ser elegido es 1/4**



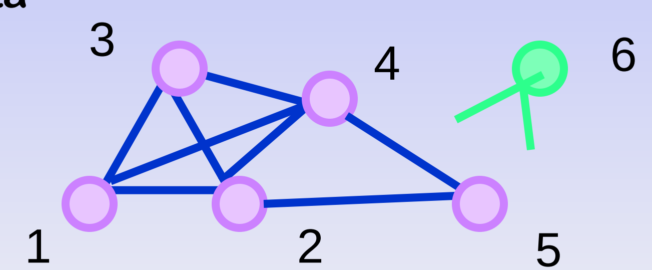
2. **Agregamos un nodo con m=2**

Elige al azar los nodos 2 y 4

3. **Ahora las probabilidades de 1,2,3,4 o 5 de ser elegidos son 3/16, 1/4, 3/16, 1/4, 1/8 respectivamente**



4. **Agregamos otro nodo con m=2, y cada link se conecta a un nodo diferente de acuerdoo a la probabilidad mencionada.**

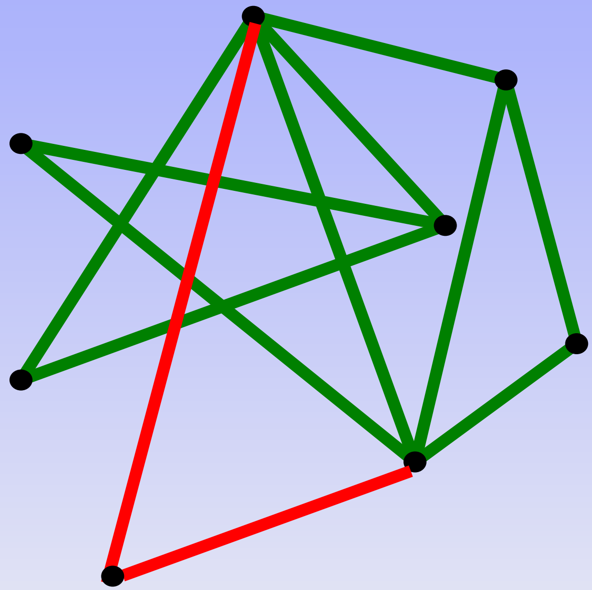


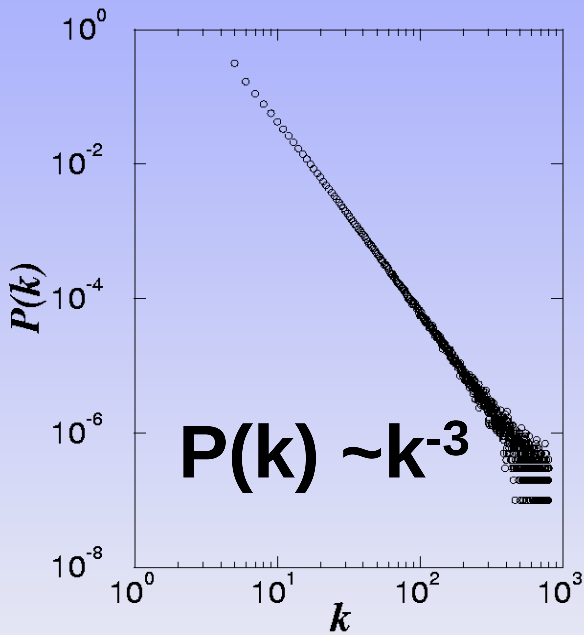
Modelo BA

(1) Crecimiento : En cada paso de tempo se agregan un nodo y *m* links

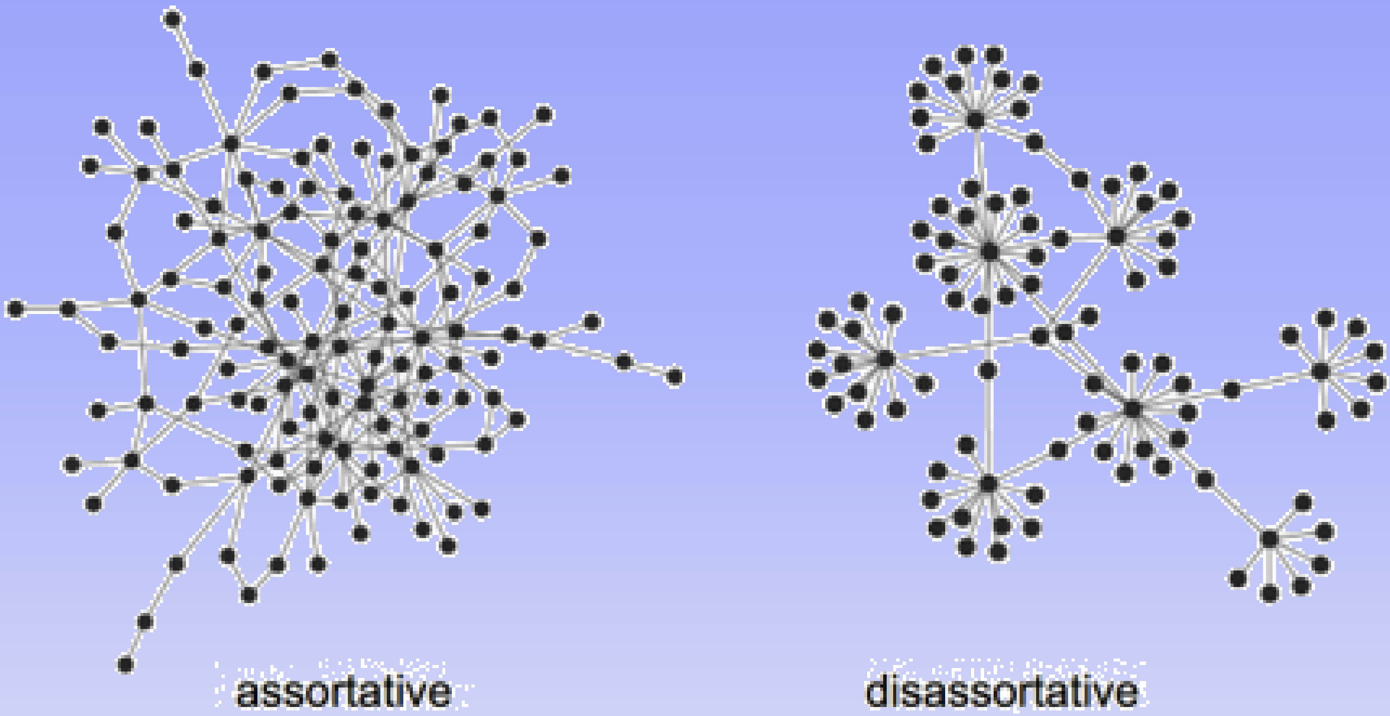
(2) Asociación preferencial : La probabilidad de que un nuevo nodo se conecte a un nodo *i*

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

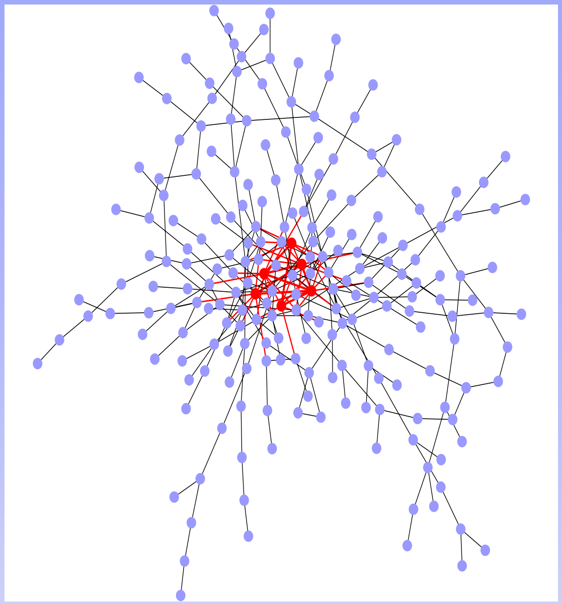




Assortativity

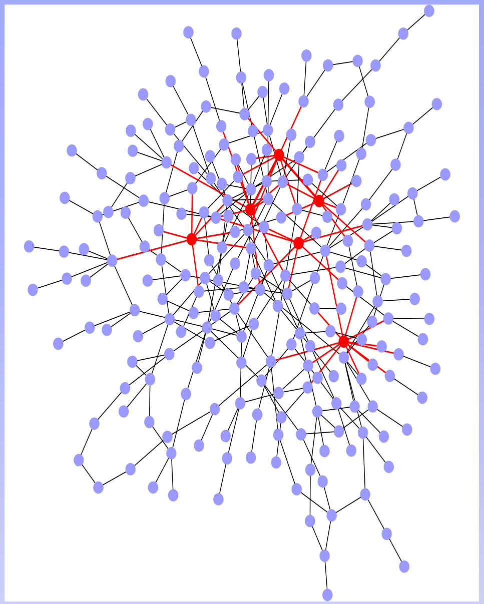


Assortativity



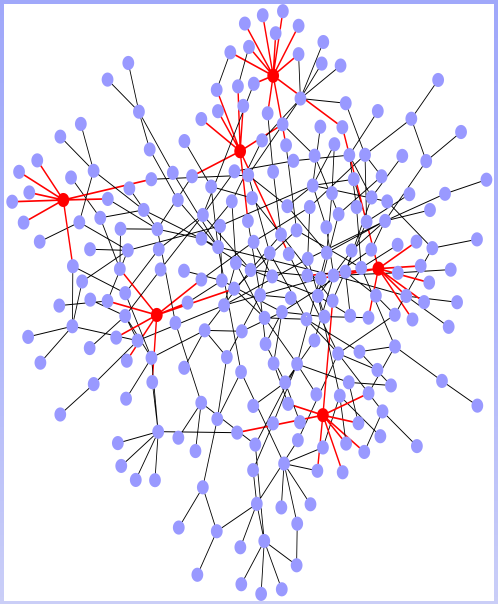
Assortative

.



Neutral

.



Disassortative

Juego de bienes públicos

Cada jugador recibe una suma de dinero.

Cada uno puede contribuir a un pozo común.

El pozo acumulado aumenta y es repartido entre todos.

Maximización del pago $\Rightarrow$ contribuir con nada

Juego de bienes públicos

Los jugadores no maximizan el pago

Contribuciones típicas 50%.

Encuentros repetidos reducen las contribuciones.

Reiniciar el juego regresa a 50% (con los mismos jugadores).

Colas largas de contribuciones sustanciosas

El juego del dictador

- Dos Jugadores
- El primer jugador recibe una suma de dinero
- Decide cuanto dinero cederle al segundo
- El segundo jugador no tiene más que aceptar o no la oferta
- En realidad no es un juego. Teoría de las decisiones

Juego del Ultimatum

Dos jugadores deben dividir una suma de dinero (M)

O (oferente) ofrece una división del total (M-x, x)

A (aceptador) decide aceptarla o no

Si A acepta ambos jugadores reciben lo pactado

Si A rechaza la oferta ninguno recibe nada

Jugador racional: Aceptar $x>0$

Resultados teóricos

Única solución, que es equilibrio de Nash

$$D = (M - \varepsilon\ ,\ \varepsilon)$$

Esta es la solución "racional". Basada en los axiomas

1 Cada jugador prefiere una ganancia α a β si $\alpha > \beta$
2 Los dos jugadores conocen 1
3 *O* puede calcular la oferta óptima

Resultados experimentales

Ámbitos universitarios

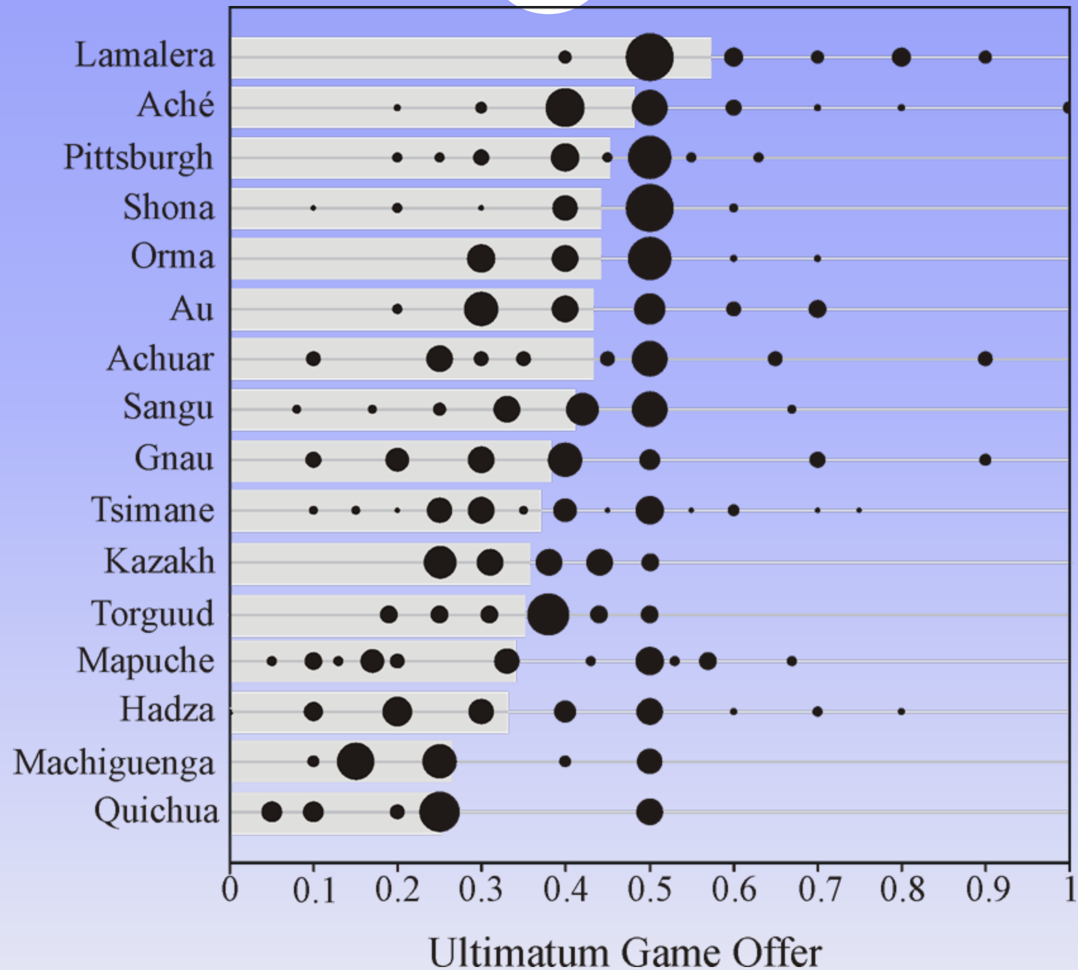
Oferta Modal = 50%.

Oferta Media = 40%–50%.

Ofertas < 20% son rechazadas.

Resultados transculturales

Resultados transculturales



Dinámica del replicador

Debe negociarse una cantidad igual a 1

Los jugadores tienen igual probabilidad de ser O o A

Cuando *i* es O ofrece p_i

Cuando *i* es A rechaza cualquier oferta menor a q_i

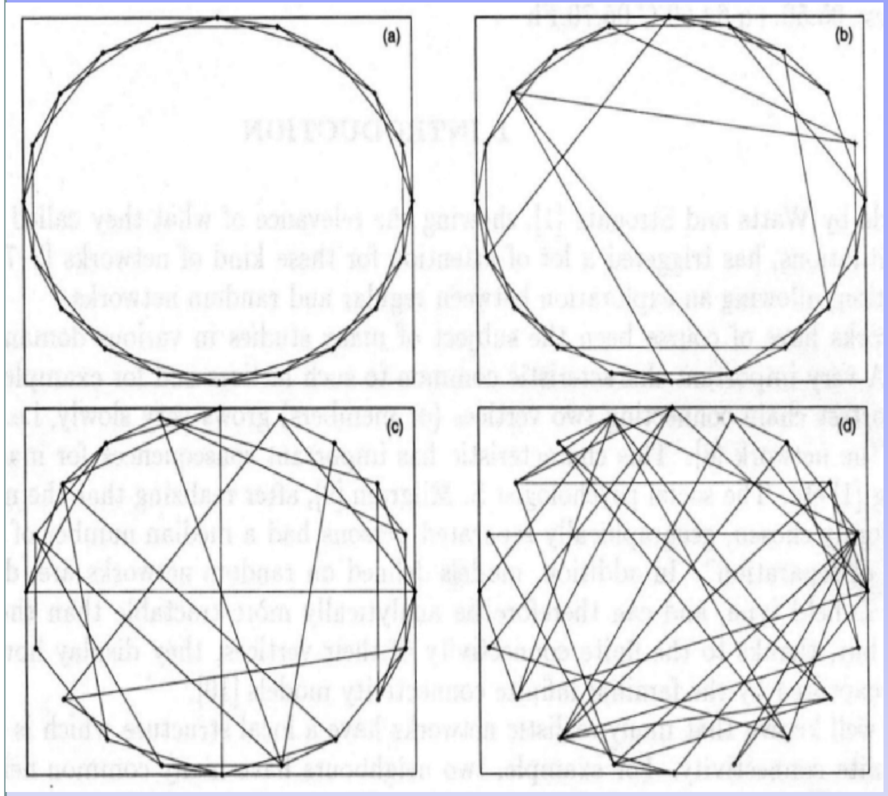
$1 - p_i \geq q_i$

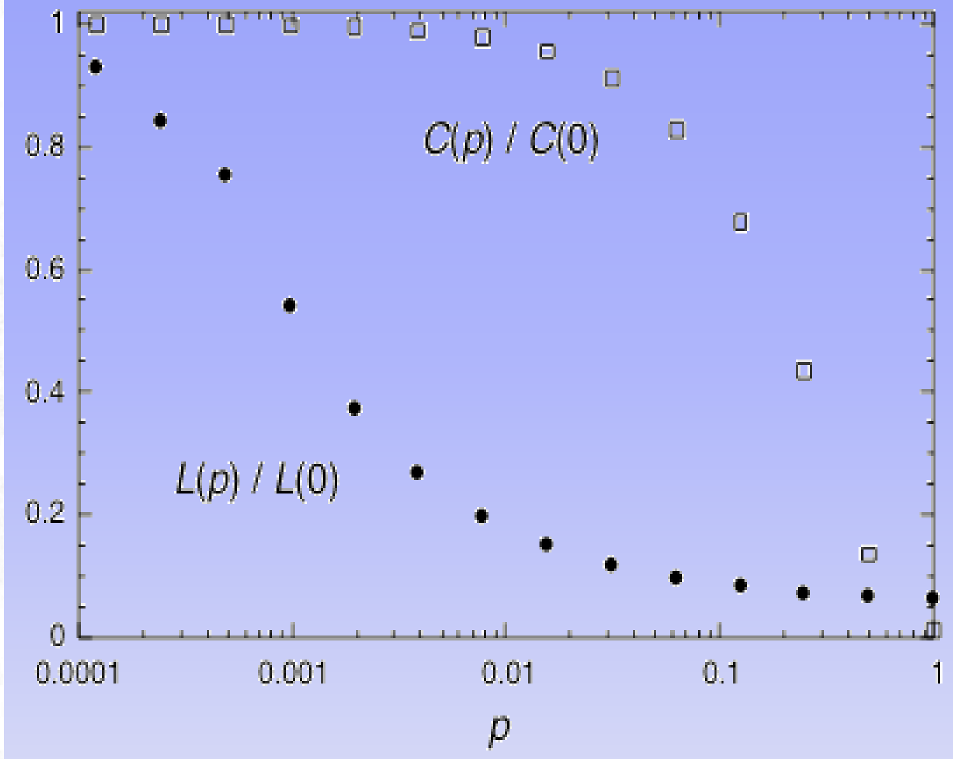
Pago medio

$S_1=(p_1,q_1)$ contra $S_2=(p_2,q_2)$

$1- p_1 + p_2$	$p_1 \geq q2 \wedge p_2 \geq q_1$
$1 - p_1$	$p_1 \geq q2 \wedge p_2 < q_1$
$p2$	$p_1 < q2 \wedge p_2 \geq q_1$
0	$p_1 < q2 \wedge p_2 < q_1$

Redes Small World





Continuum de estrategias

- Población de n jugadores
  - Los individuos dejan descencientes en proporción al payoff
  - Los hijos adoptan la estrategia del ancestro más o menos un error (mutación)
  - En campo medio, la dinámica evolutiva lleva al estado de estrategias racionales

Distribución espacial - Topología