Comida gourmet, sólo para unos pocos (Grupo de Abejorros)

Raúl Barriga, Germán Botto, Alberto Ferrari, Josefina Meirovich

7° Escuela BIOMAT, Huerta Grande, 1 a 5 de agosto de 2016

Escuela Argentina de Matemática y Biología
BIOMAT
HUERTA GRANDE - CORDOBA
del 1 al 5 de agosto de 2016

Tras un intenso debate, llegamos a la conclusión de que dependiendo de la densidad de plantas, podíamos considerar diferentes matrices de payoff. Los pagos que eligiremos pueden ser intepretados biológicamente como proporcionales al número de descendientes correspondientes a cada abejorro.

Tras un intenso debate, llegamos a la conclusión de que dependiendo de la densidad de plantas, podíamos considerar diferentes matrices de payoff. Los pagos que eligiremos pueden ser intepretados biológicamente como proporcionales al número de descendientes correspondientes a cada abejorro.

1. En el caso de una alta densidad de plantas, la mejor estrategia siempre la tiene el Especialista, más aún contra un Generalista.

	Especialista	Generalista
Especialista	b	c
Generalista	0	a

CUADRO: Lejos de la extinción de plantas $(0 < a < b < c)$

Tras un intenso debate, llegamos a la conclusión de que dependiendo de la densidad de plantas, podíamos considerar diferentes matrices de payoff. Los pagos que eligiremos pueden ser intepretados biológicamente como proporcionales al número de descendientes correspondientes a cada abejorro.

1. En el caso de una alta densidad de plantas, la mejor estrategia siempre la tiene el Especialista, más aún contra un Generalista.

	Especialista	Generalista
Especialista	b	c
Generalista	0	a

CUADRO: Lejos de la extinción de plantas $(0 < a < b < c)$

2. En el caso de una baja densidad de plantas, la mejor estrategia siempre la tiene el Generalista, más aún contra otro Generalista.

	Especialista	Generalista
Especialista	0	a
Generalista	b	c

CUADRO: Cerca de la extinción de plantas $(0 < a < b < c)$

5. Teniendo en cuenta que la probabilidad de encuentro depende de la densidad de las plantas, si nos encontramos con un Especialista entonces el recurso abunda y por ende conviene ser Especialista, caso contrario el recurso escasea y entonces conviene ser Generalista.

	Especialista	Generalista
Especialista	a	0
Generalista	0	b

CUADRO: Densidad relativa a las estrategias $(0 < a, 0 < b)$

5. Teniendo en cuenta que la probabilidad de encuentro depende de la densidad de las plantas, si nos encontramos con un Especialista entonces el recurso abunda y por ende conviene ser Especialista, caso contrario el recurso escasea y entonces conviene ser Generalista.

	Especialista	Generalista
Especialista	a	0
Generalista	0	b

CUADRO: Densidad relativa a las estrategias ($0 < a$, $0 < b$)

Considerando el último caso, que nos parece más adecuado a la realidad, resulta la siguiente matriz de pago:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

donde a y b son positivos (pero no necesariamente es $a < b$ ó $b < a$).

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Hallemos la ecuación del replicador:

- $f_1(\vec{x}) = e_1 A \vec{x}^T = a x_1$
- $f_2(\vec{x}) = e_2 A \vec{x}^T = b x_2$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Hallemos la ecuación del replicador:

- $f_1(\vec{x}) = e_1 A \vec{x}^T = a x_1$
- $f_2(\vec{x}) = e_2 A \vec{x}^T = b x_2$
- $\bar{f}(\vec{x}) = x_1 f_1 + x_2 f_2 = x_1(a x_1) + x_2(b x_2) = a x_1^2 + b x_2^2$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Hallemos la ecuación del replicador:

- $f_1(\vec{x}) = e_1 A \vec{x}^T = a x_1$
- $f_2(\vec{x}) = e_2 A \vec{x}^T = b x_2$
- $\bar{f}(\vec{x}) = x_1 f_1 + x_2 f_2 = x_1(a x_1) + x_2(b x_2) = a x_1^2 + b x_2^2$
- $\dot{x}_1 = x_1(f_1(\vec{x}) - \bar{f}(\vec{x})) = x_1(a x_1 - (a x_1^2 + b x_2^2)) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Hallemos la ecuación del replicador:

- $f_1(\vec{x}) = e_1 A \vec{x}^T = a x_1$
- $f_2(\vec{x}) = e_2 A \vec{x}^T = b x_2$
- $\bar{f}(\vec{x}) = x_1 f_1 + x_2 f_2 = x_1(a x_1) + x_2(b x_2) = a x_1^2 + b x_2^2$
- $\dot{x}_1 = x_1(f_1(\vec{x}) - \bar{f}(\vec{x})) = x_1(a x_1 - (a x_1^2 + b x_2^2)) = 0$

$\therefore x_1 = 0$ ó $a x_1 - (a x_1^2 + b x_2^2) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Hallemos la ecuación del replicador:

- $f_1(\vec{x}) = e_1 A \vec{x}^T = a x_1$
- $f_2(\vec{x}) = e_2 A \vec{x}^T = b x_2$
- $\bar{f}(\vec{x}) = x_1 f_1 + x_2 f_2 = x_1(a x_1) + x_2(b x_2) = a x_1^2 + b x_2^2$
- $\dot{x_1} = x_1(f_1(\vec{x}) - \bar{f}(\vec{x})) = x_1(a x_1 - (a x_1^2 + b x_2^2)) = 0$

$\therefore x_1 = 0$ ó $a x_1 - (a x_1^2 + b x_2^2) = 0$

Desarrollando la segunda expresión:

$$\begin{aligned}
&a x_1 - a x_1^2 - b x_2^2 = 0 \\
&a x_1 - a x_1^2 - b(1 - x_1)^2 = 0 \\
&a x_1 - a x_1^2 - b(1 - 2x_1 + x_1^2) = 0 \\
&a x_1 - a x_1^2 - b + 2b x_1 - b x_1^2 = 0 \\
&(-a - b) x_1^2 + (a + 2b) x_1 - b = 0
\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula resolvente de la ecuación cuadrática:

$$x_1 = \frac{-(a+2b) \pm \sqrt{(a+2b)^2 - 4(-a-b)(-b)}}{2(-a-b)}$$

$$x_1 = \frac{-a-2b \pm \sqrt{a^2+4ab+4b^2-4ab-4b^2}}{2(-a-b)}$$

$$x_1 = \frac{-a-2b \pm \sqrt{a^2}}{2(-a-b)}$$

$$x_1 = \frac{-a-2b \pm a}{2(-a-b)}$$

Aplicando la fórmula resolvente de la ecuación cuadrática:

$$x_1 = \frac{-(a+2b) \pm \sqrt{(a+2b)^2 - 4(-a-b)(-b)}}{2(-a-b)}$$

$$x_1 = \frac{-a-2b \pm \sqrt{a^2+4ab+4b^2-4ab-4b^2}}{2(-a-b)}$$

$$x_1 = \frac{-a-2b \pm \sqrt{a^2}}{2(-a-b)}$$

$$x_1 = \frac{-a-2b \pm a}{2(-a-b)}$$

Resultando entonces:

- $x_1^1 = \dfrac{-a-2b+a}{-2a-2b} = \dfrac{b}{a+b}$
- $x_1^2 = \dfrac{-a-2b-a}{-2a-2b} = 1$

Por lo tanto los puntos de equilibrio son:

- $(1,0)$
- $(0,1)$
- $x^* = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right)$

Por lo tanto los puntos de equilibrio son:

- $(1,0)$
- $(0,1)$
- $x^* = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right)$

Puesto que $a, b > 0$, por lo visto en la Teoría resultan $(1,0)$ y $(0,1)$ estables, mientras que $x^* = (\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$ es inestable.

Por lo tanto los puntos de equilibrio son:

- $(1,0)$
- $(0,1)$
- $x^* = \left(\dfrac{b}{a+b}, \dfrac{a}{a+b}\right)$

Puesto que $a,b > 0$, por lo visto en la Teoría resultan $(1,0)$ y $(0,1)$ estables, mientras que $x^* = (\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$ es inestable.

Para poder introducir una especie Generalista 2 más efectiva que Generalista pero menos efectiva que Especialista, sólo podemos considerar de las matrices iniciales, aquella que considera estar lejos de la extinción de plantas, favoreciendo a los Especialistas sobre los Generalistas, es decir:

	Especialista	Generalista
Especialista	b	c
Generalista	0	a

CUADRO: Lejos de la extinción de plantas $(0 < a < b < c)$

Introduciendo la especie Generalista 2:

	Especialista	Generalista 1	Generalista 2
Especialista	f	h	g
Generalista 1	0	b	a
Generalista 2	c	e	d

CUADRO: Nueva especie Generalista 2 ($0 < a < b < c < d < e < f < g < h$)

Introduciendo la especie Generalista 2:

	Especialista	Generalista 1	Generalista 2
Especialista	f	h	g
Generalista 1	0	b	a
Generalista 2	c	e	d

CUADRO: Nueva especie Generalista 2 ($0 < a < b < c < d < e < f < g < h$)

El orden de los parámetros está determinado por lo siguiente: lo menos conveniente es ser Generalista 1, luego Generalista 2 y finalmente Especialista.

Por otro lado, la mayor desventaja se encuentra frente a un Especialista, luego contra un Generalista 2 y finalmente contra un Generalista 1, sea cual sea la especie.

Resulta entonces la siguiente matriz de pago:

$$A = \begin{pmatrix} f & h & g \\ 0 & b & a \\ c & e & d \end{pmatrix}$$

con $0 < a < b < c < d < e < f < g < h$.

Resulta entonces la siguiente matriz de pago:

$$A = \begin{pmatrix} f & h & g \\ 0 & b & a \\ c & e & d \end{pmatrix}$$

con $0 < a < b < c < d < e < f < g < h$.

Realizando la transformación $B_{ij} = A_{ij} - \Phi_j$ siendo $\Phi_j = (0, b, a)$ resulta:

$$B = \begin{pmatrix} f & h - b & g - a \\ 0 & 0 & 0 \\ c & e - b & d - a \end{pmatrix}$$

Observemos que a y b eran los parámetros más pequeños, resultando todas las entradas de B positivas.

Resulta entonces la siguiente matriz de pago:

$$A = \begin{pmatrix} f & h & g \\ 0 & b & a \\ c & e & d \end{pmatrix}$$

con $0 < a < b < c < d < e < f < g < h$.

Realizando la transformación $B_{ij} = A_{ij} - \Phi_j$ siendo $\Phi_j = (0, b, a)$ resulta:

$$B = \begin{pmatrix} f & h-b & g-a \\ 0 & 0 & 0 \\ c & e-b & d-a \end{pmatrix}$$

Observemos que a y b eran los parámetros más pequeños, resultando todas las entradas de B positivas.

Aplicando ahora la transformación $C_{ij} = \frac{B_{ij}}{\Psi_j}$ con $\Psi_j = (f, h-b, g-a)$ resulta:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{c}{f} & \frac{e-b}{h-b} & \frac{d-a}{g-a} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{c}{f} & \frac{e-b}{h-b} & \frac{d-a}{g-a} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{c}{f} & \frac{e-b}{h-b} & \frac{d-a}{g-a} \end{pmatrix}$$

Observemos que como $c < f$, $e < h$ y $d < g$, resulta $0 < \alpha = \frac{c}{f} < 1$, $0 < \beta = \frac{e-b}{h-b} < 1$, $0 < \gamma = \frac{d-a}{g-a} < 1$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{c}{f} & \frac{e-b}{h-b} & \frac{d-a}{g-a} \end{pmatrix}$$

Observemos que como $c < f$, $e < h$ y $d < g$, resulta $0 < \alpha = \frac{c}{f} < 1$, $0 < \beta = \frac{e-b}{h-b} < 1$, $0 < \gamma = \frac{d-a}{g-a} < 1$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

Hallemos la ecuación del replicador:

- $f_1(\vec{y}) = e_1 C \vec{y}^T = y_1 + y_2 + y_3 = 1$
- $f_2(\vec{y}) = e_2 C \vec{y}^T = 0$
- $f_3(\vec{y}) = e_3 C \vec{y}^T = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{c}{f} & \frac{e-b}{h-b} & \frac{d-a}{g-a} \end{pmatrix}$$

Observemos que como $c < f$, $e < h$ y $d < g$, resulta $0 < \alpha = \frac{c}{f} < 1$, $0 < \beta = \frac{e-b}{h-b} < 1$, $0 < \gamma = \frac{d-a}{g-a} < 1$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

Hallemos la ecuación del replicador:

- $f_1(\vec{y}) = e_1 C\vec{y}^T = y_1 + y_2 + y_3 = 1$
- $f_2(\vec{y}) = e_2 C\vec{y}^T = 0$
- $f_3(\vec{y}) = e_3 C\vec{y}^T = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$

- $\bar{f}(\vec{y}) = y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3 = y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3 = y_1 + y_3(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3)$

- $\dot{y_1} = y_1(f_1(\vec{y}) - \bar{f}(\vec{y})) = y_1(1 - y_1 - y_3(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3)) = 0$
- $\dot{y_2} = y_1(f_2(\vec{y}) - \bar{f}(\vec{y})) = -y_2(y_1 + y_3(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3)) = 0$
- $y_1 + y_2 + y_3 = 1$

- $\dot{y_1} = y_1(f_1(\vec{y}) - \bar{f}(\vec{y})) = y_1(1 - y_1 - y_3(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3)) = 0$
- $\dot{y_2} = y_1(f_2(\vec{y}) - \bar{f}(\vec{y})) = -y_2(y_1 + y_3(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3)) = 0$
- $y_1 + y_2 + y_3 = 1$

De estas 3 condiciones obtuvimos los siguientes puntos de equilibrio:

- $(1, 0, 0)$
- $(0, 1, 0)$
- $(0, 0, 1)$
- $\left(0, \dfrac{\gamma}{\gamma - \beta}, \dfrac{-\beta}{\gamma - \beta}\right)$
- $\left(\dfrac{\gamma - 1}{\gamma - \alpha}, 0, \dfrac{1 - \alpha}{\gamma - \alpha}\right)$

- $\dot{y_1} = y_1(f_1(\vec{y}) - \bar{f}(\vec{y})) = y_1(1 - y_1 - y_3(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3)) = 0$
- $\dot{y_2} = y_1(f_2(\vec{y}) - \bar{f}(\vec{y})) = -y_2(y_1 + y_3(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3)) = 0$
- $y_1 + y_2 + y_3 = 1$

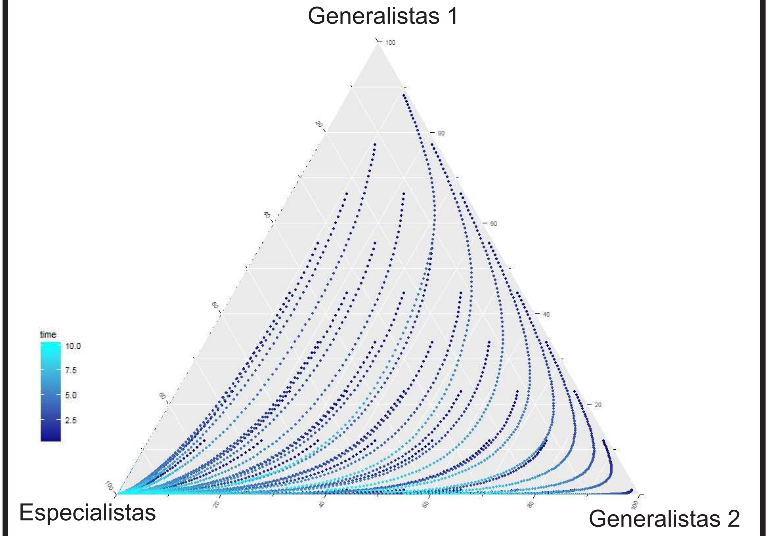
De estas 3 condiciones obtuvimos los siguientes puntos de equilibrio:

- $(1,0,0)$
- $(0,1,0)$
- $(0,0,1)$
- $\left(0, \dfrac{\gamma}{\gamma-\beta}, \dfrac{-\beta}{\gamma-\beta}\right) \rightarrow$ Descartado pues $\dfrac{\gamma}{\gamma-\beta} < 0$ ó $\dfrac{-\beta}{\gamma-\beta} < 0$ dependiendo del signo de $\gamma - \beta$.
- $\left(\dfrac{\gamma-1}{\gamma-\alpha}, 0, \dfrac{1-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)$

- $\dot{y_1} = y_1(f_1(\vec{y}) - \bar{f}(\vec{y})) = y_1(1 - y_1 - y_3(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3)) = 0$
- $\dot{y_2} = y_1(f_2(\vec{y}) - \bar{f}(\vec{y})) = -y_2(y_1 + y_3(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3)) = 0$
- $y_1 + y_2 + y_3 = 1$

De estas 3 condiciones obtuvimos los siguientes puntos de equilibrio:

- $(1,0,0)$
- $(0,1,0)$
- $(0,0,1)$
- $\left(0, \frac{\gamma}{\gamma-\beta}, \frac{-\beta}{\gamma-\beta}\right) \rightarrow$ Descartado pues $\frac{\gamma}{\gamma-\beta} < 0$ ó $\frac{-\beta}{\gamma-\beta} < 0$ dependiendo del signo de $\gamma - \beta$.
- $\left(\frac{\gamma-1}{\gamma-\alpha}, 0, \frac{1-\alpha}{\gamma-\alpha}\right) \rightarrow$ Descartado pues $\frac{\gamma-1}{\gamma-\alpha} < 0$ ó $\frac{1-\alpha}{\gamma-\alpha} < 0$ dependiendo del signo de $\gamma - \alpha$.


Generalistas 1
Especialistas
Generalistas 2
time
10.0
7.5
5.0
2.5

Como este modelo es muy aburrido, decidimos modificar el orden de los parámetros del siguiente modo:

$$A = \begin{pmatrix} f & h & g \\ 0 & b & a \\ c & e & d \end{pmatrix}$$

con $0 < a < b < c < f < g < d < e < h$.

Como este modelo es muy aburrido, decidimos modificar el orden de los parámetros del siguiente modo:

$$A = \begin{pmatrix} f & h & g \\ 0 & b & a \\ c & e & d \end{pmatrix}$$

con $0 < a < b < c < f < g < d < e < h$.

Aplicando las mismas transformaciones que antes, resulta:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

siendo $\alpha = \frac{c}{f}$, $\beta = \frac{e-b}{h-b}$, $\gamma = \frac{d-a}{g-a}$. Observemos que $0 < \alpha, \beta < 1$, pero $\gamma > 1$.

Como este modelo es muy aburrido, decidimos modificar el orden de los parámetros del siguiente modo:

$$A = \begin{pmatrix} f & h & g \\ 0 & b & a \\ c & e & d \end{pmatrix}$$

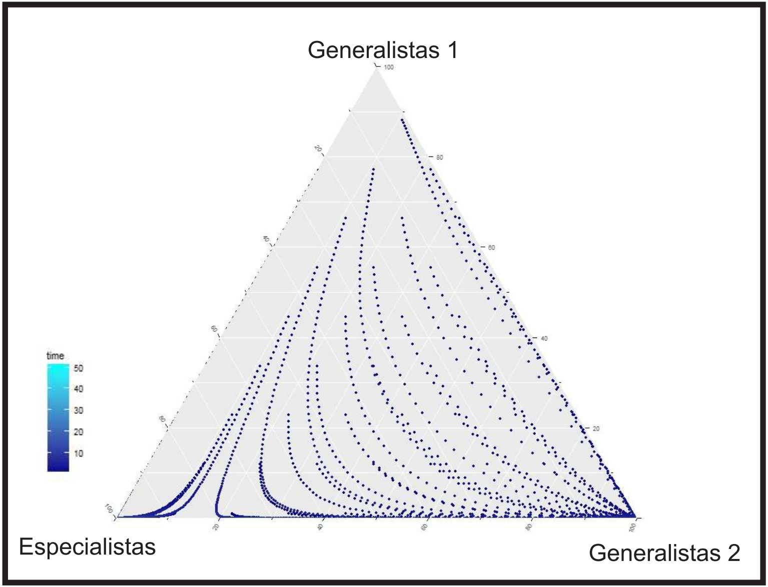
con $0 < a < b < c < f < g < d < e < h$.

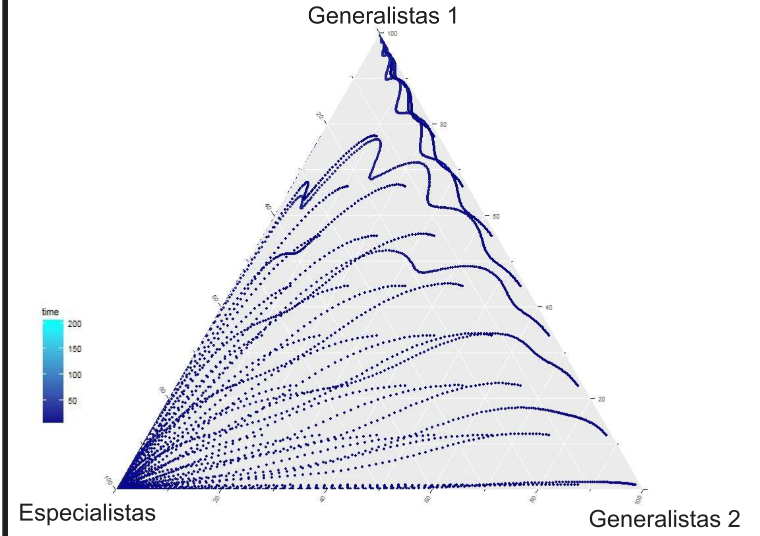
Aplicando las mismas transformaciones que antes, resulta:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

siendo $\alpha = \frac{c}{f}$, $\beta = \frac{e-b}{h-b}$, $\gamma = \frac{d-a}{g-a}$. Observemos que $0 < \alpha, \beta < 1$, pero $\gamma > 1$. Con esto, resulta que a los puntos de equilibrio triviales se les incorpora el punto:

- $\left(\dfrac{\gamma - 1}{\gamma - \alpha}, 0, \dfrac{1 - \alpha}{\gamma - \alpha} \right)$


Generalistas 1
time
50
40
30
20
10
Especialistas
Generalistas 2


Generalistas 1
Especialistas
Generalistas 2
time
200
150
100
50
100
80
60
40
20
20
40
60
80
100
20
40
60
80
100

¡¡Muchas gracias por su atención!!

XXI CONGRESO ARGENTINO DE BIOINGENIERÍA
X JORNADA DE INGENIERÍA CLÍNICA

25 al 27 de octubre del 2017 – Córdoba

Áreas temáticas

- Biomécanica, Robótica y Análisis de Movimiento
- Radiobiología, Radioterapia y Física Médica
- Modelado y Simulación de Sistemas Biomédicos
- Productos y Dispositivos Médicos
- Neuroingeniería o Ingeniería Neuronal
- Informática Médica y Telemedicina
- Bioinformática y Biología Molecular
- Ingeniería de Rehabilitación y Prótesis
- Educación y Experiencias Profesionales
- Bioinstrumentación, Biosensores, BioMems y Nanotecnología
- Ingeniería Clínica y Gestión de Tecnologías Médicas
- Procesamiento de Imágenes Biomédicas
- Biomateriales, Ingeniería de Tejidos y Órganos Artificiales

SOCIEDAD ARGENTINA DE BIOINGENIERÍA

www.sabi.org.ar (Información del congreso la próxima semana)