PRÁCTICO 2

Álgebra de matrices

1. Sean
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   (a) Realizar los productos AB, BA, AC, CA, BC, CB, ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA.
   (b) Verificar que, en los productos de 3 matrices, da lo mismo asociar de una u otra forma.

2. Probar que si A y B son matrices $r \times n$ y C es una matriz $n \times q$, entonces $(A + B)C = AC + BC$.

3. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$. Repetir el Ejercicio 1 con aquellos productos que tengan sentido.

4. Sean A y B matrices $r \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Probar que:
   (a) si $m > n$, entonces el sistema $ABX = 0$ tiene soluciones no nulas.
   (b) si $r > n$, entonces existe un b, $r \times 1$, tal que $ABX = b$ no tiene solución.

5. Hallar tres matrices 2×2 distintas que cumplan la ecuación $X^2 = 0$. Hallar tres matrices 2×2 distintas que cumplan la ecuación $X^2 = I$.

6. Para cada una de las siguientes matrices, usar operaciones elementales por fila para determinar si son inversibles y hallar la inversa cuando lo sean.
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

7. Sea A la primera matriz del ejercicio anterior. Hallar matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que $E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I$.

8. Dada una matriz cuadrada $n \times n$ A, se define la *traza* de A como $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$. Probar que si A y B son matrices $n \times n$ entonces $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

9. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
   (a) Sean A y B matrices cuadradas tales $AB = BA$ pero ninguna es múltiplo de la otra. Entonces A o B es diagonal.
   (b) Si A es una matriz diagonal tal que $\operatorname{tr} A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$.
   (c) Dos matrices 3×3 escalón reducidas por filas que tienen la misma cantidad de unos son iguales.
   (d) Si A y B son matrices $n \times n$, entonces $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.
   (e) Si A y B son matrices inversibles entonces $(A + B)$ es una matriz inversible.
   (f) Si un sistema de ecuaciones tiene dos soluciones diferentes entonces tiene infinitas soluciones diferentes.

EJERCICIOS ADICIONALES PRÁCTICO 2

Ejercicio 1. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a + b + c + d = k$.

Probar que si $k = 0, 1$ o 2 entonces solo hay dos matrices escalón reducidas por filas con esas condiciones, y que en los otros casos hay una sola.

Ejercicio 2. Si A es $n \times r$ y B es $r \times n$, entonces AB y BA son matrices cuadradas. Probar que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Verificar esto para algunos de los productos hechos antes.

Ejercicio 3. A pesar del ejercicio anterior dar ejemplos de matrices A, B y C tales que $\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(BAC)$. (Ayuda: Basta con usar matrices 2×2)

Ejercicio 4. Sean A y B matrices $r \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Probar que:
(a) $\text{Rango}(A) = n$ y $\text{Rango}(B) = m \Longrightarrow \text{Rango}(AB) = m$.
(b) $\text{Rango}(AB) = m \Longrightarrow \text{Rango}(B) = m$.

Ejercicio 5. Sean A y B matrices $r \times n$ y $n \times r$ respectivamente, con $r > n$.
(a) Probar que AB no es invertible. (Ayuda: ejercicio 4).
(b) Dar un ejemplo con esas condiciones tal que BA sea invertible.

Ejercicio 6. Para cada una de las siguientes matrices, usar operaciones elementales por fila para determinar si son inversibles y hallar la inversa cuando lo sean.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7. Sea A una de las matrices del ejercicio anterior. Hallar matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que $E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I$. Hacer esto para cada una de las matrices.

Ejercicio 8. Probar que si e es una operación elemental de fila, y $E = e(I)$, entonces $e(A) = EA$ para toda matriz A.

Ejercicio 9. Sean A y B matrices cuadradas del mismo tamaño. Probar que si $A \sim I$ y $B \sim I$, entonces $AB \sim I$.

Ejercicio 10. Sea A una matriz $n \times n$ sobre los reales. Una matriz se dice nilpotente si existe un $m \geq 1$ tal que $A^m = 0$. Probar que si una matriz A es nilpotente, entonces $A - I$ es invertible.