

PRÁCTICO 5

Coordenadas, bases, sumas e intersecciones de subespacios

Ejercicio 1. Probar que los vectores $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (2, 0, 1)$, $\alpha_3 = (1, 1, 1)$ forman una base de \mathbb{R}^3 y dar las coordenadas de un vector (a, b, c) en esta base.

Ejercicio 2. Probar que los vectores $\alpha_1 = (1, 0, -i)$, $\alpha_2 = (1 + i, 1 - i, 1)$, $\alpha_3 = (i, i, i)$ forman una base de \mathbb{C}^3 y dar las coordenadas de un vector (a, b, c) en esta base.

Ejercicio 3. Sea $W = \langle S \rangle$ donde $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \subset \mathbb{R}^4$ con

$$\alpha_1 = (-1, 0, 1, 2) \quad \alpha_2 = (3, 4, -2, 5) \quad \alpha_3 = (0, 4, 1, 11) \quad \alpha_4 = (1, 4, 0, 9).$$

Hallar una base de W y describirlo implícitamente, es decir hallar un sistema de ecuaciones lineales homogéneas para las cuáles el espacio de soluciones sea exactamente W .

Ejercicio 4. Sea $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\} \subset \mathbb{R}^4$, donde

$$\beta_1 = (1, 1, 1, -2) \quad \beta_2 = (3, 0, -2, 1) \quad \beta_3 = (1, -2, -4, 5) \quad \beta_4 = (-2, 3, -4, 0)$$

y sea $W_2 = \langle S_2 \rangle$

- Hallar una base de W_2 .
- Hallar un sistema de ecuaciones lineales homogéneas para las cuáles el espacio de soluciones sea exactamente W_2 .
- Encontrar una base de $W_1 \cap W_2$ y describir $W_1 \cap W_2$ implícitamente. (W_1 es el del ejercicio anterior).

Ejercicio 5. Dados los siguientes vectores de \mathbb{R}^4

$$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0) \quad \alpha_2 = (0, 0, 1, 1) \quad \alpha_3 = (1, 0, 0, 4) \quad \alpha_4 = (0, 0, 0, 2)$$

- Demostrar que $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ es una base de \mathbb{R}^4 .
- Hallar las coordenadas de cada uno de los vectores de la base canónica respecto de la base ordenada \mathcal{B} .
- Hallar las matrices de cambio de base de la base canónica a \mathcal{B} y viceversa.

Ejercicio 6. Sea $W = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ el subespacio de \mathbb{C}^3 generado por $\alpha_1 = (1, 0, i)$ y $\alpha_2 = (1 + i, 1, -1)$.

- Demostrar que $\mathcal{B}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ es una base de W .
- Describir W implícitamente.
- Demostrar que los vectores $\beta_1 = (1, 1, 0)$ y $\beta_2 = (1, i, 1 + i)$ pertenecen a W y que $\mathcal{B}_2 = \{\beta_1, \beta_2\}$ es otra base de W .
- ¿Cuáles son las coordenadas de α_1 y α_2 en la base ordenada \mathcal{B}_2 ?
- Hallar las matrices de cambio de base $P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ y $P_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$.

Ejercicio 7. Sean

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

y sean W_1 y W_2 los espacios solución de los sistemas homogéneos asociados a A_1 y A_2 respectivamente.

- (a) Hallar una base de W_1 y W_2 .
- (b) Encontrar una base de $W_1 \cap W_2$ y una base de $W_1 + W_2$.
- (c) Describir implícitamente $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.
- (d) Encontrar un subespacio $W_3 \subset \mathbb{R}^5$ tal que $W_1 \oplus W_3 = W_1 + W_2$.

Ejercicio 8. (a) Expresar \mathbb{R}^3 como suma directa de dos subespacios.

- (b) Sean $W_1 = \langle (1, 1, 1); (1, 1, 0) \rangle$ y $W_2 = \langle (1, -1, 0) \rangle$. ¿Son ellos complementarios en \mathbb{R}^3 ?
- (c) Sean $W_1 = \langle (1, 1, 1); (1, 1, 0) \rangle$ y $W_2 = \langle (0, 0, 1) \rangle$. ¿Son ellos complementarios en \mathbb{R}^3 ?

Ejercicio 9. Sea V un espacio vectorial y sea W_1 un subespacio de V . Demostrar que existe un subespacio W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$.

Ejercicio 10. Sea V el espacio vectorial real generado por las filas de la matriz (espacio fila)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 21 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 42 & -1 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Encontrar una base de V .
- (b) Describir implícitamente los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ que están en V .
- (c) Si $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in V$, dar las coordenadas de u en la base dada en la parte (a).

Ejercicio 11. Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- (a) Demostrar que \mathcal{B} es una base de $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.
- (b) Hallar las coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con respecto a la base \mathcal{B} .
- (c) Hallar las matrices de cambio de base de la base canónica a \mathcal{B} y viceversa.

Ejercicios adicionales

1. Dados los siguientes vectores de \mathbb{R}^4

$$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0) \quad \alpha_2 = (0, 0, 1, 1) \quad \alpha_3 = (1, 0, 0, 4) \quad \alpha_4 = (0, 0, 0, 2)$$

- (a) Demostrar que $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ es una base de \mathbb{R}^4 .

- (b) Hallar las coordenadas de cada uno de los vectores de la base canónica respecto de la base ordenada \mathcal{B} .
- (c) Hallar las matrices de cambio de base de la base canónica a \mathcal{B} y viceversa.

2. Sean

$$S_1 = \{(1, 0, 1, 2), (-1, 2, 3, 8), (-1, 1, 1, 3), (0, 1, 2, 5)\},$$

$$S_2 = \{(1, 1, 0, 1), (1, -1, 0, 3), (3, 1, 2, 4), (1, 1, 2, 0)\}$$

y sean $W_1 = \langle S_1 \rangle$ y $W_2 = \langle S_2 \rangle$ los correspondientes subespacios generados en \mathbb{R}^4 .

- (a) Dar una base B_i de W_i que esté contenida en S_i , $i = 1, 2$.
- (b) Describir W_1 , W_2 , $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$ en forma implícita.
- (c) Dar una base de $W_1 \cap W_2$ y de $W_1 + W_2$.

3. Sea V el espacio vectorial real generado por las filas de la matriz (espacio fila)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 21 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 42 & -1 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Encontrar una base de V .
- (b) Describir implícitamente los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ que están en V .
- (c) Si $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in V$, dar las coordenadas de u en la base dada en la parte (a).

4. Sea V el espacio vectorial real de todas las funciones polinomiales de \mathbb{R} en \mathbb{R} de grado menor o igual a 2. Sean

$$g_1 = 1 - x, \quad g_2 = x + x^2, \quad g_3 = (x + 1)^2.$$

- (a) Demostrar que $\mathcal{B} = \{g_1, g_2, g_3\}$ es una base de V .
- (b) Hallar las matrices de cambio de base con respecto a \mathcal{B} y a la base canónica $\{1, x, x^2\}$.

5. Sean $\alpha = (x_1, x_2)$ y $\beta = (y_1, y_2)$ dos vectores de \mathbb{R}^2 tales que

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0 \quad x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

Demostrar que $\{\alpha, \beta\}$ forman una base de \mathbb{R}^2 . Hallar las coordenadas del vector (a, b) en la base ordenada $\{\alpha, \beta\}$.

6. Sea V el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$. Sean W_{par} el subespacio de las funciones pares (i.e. $f(x) = f(-x)$) y W_{impar} el subespacio de las funciones impares (i.e. $f(x) = -f(-x)$). Probar que $V = W_{par} \oplus W_{impar}$