# PRÁCTICO 6

## Transformaciones lineales

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ son transformaciones lineales?

   (a) $T(x,y) = (1+x,y)$ (b) $T(x,y) = (y,x,x-2y)$ (c) $T(x,y) = xy$

   (d) $T(x,y) = (\cos x, y)$ (e) $T(x,y,z) = 3x - 2y + 7z$ (f) $T(x,y,z) = (z-y,0)$

2. Calcular el núcleo, la imagen y sus respectivas dimensiones para la transformación nula y la identidad para un espacio vectorial $V$.

3. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales
   (a) Dar una descripción paramétrica del $\mathrm{Nu}(T)$, dar su dimensión y una base.
   (b) Dar una descripción implícita del $\mathrm{Im}(T)$, dar su dimensión y una base.

   $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_1(x,y,z) = (z-y, 3x+y+2z, 2x+y+z)$.

   $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_2(x,y,z) = (2x+y+z, y+x, x+z)$.

   $T_3 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $T_3(z_1,z_2,z_3) = (z_1+z_2, 2z_1-3z_2+2z_3, z_1+z_2)$.

   $T_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $T_4(x) = (x,-x,2x,-4x)$.

   $T_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T_5(x_1,x_2) = (2x_1+x_2, 3x_2, 2x_1+4x_2, -x_1-2x_2)$.

   $T_6 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T_6(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1+2x_2-3x_3+x_4, -2x_2+x_3-x_4, 4x_1+2x_2-6x_3-2x_4)$.

   $T_7 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $T_7(x_1,x_2,x_3,x_4) = -2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4$.

   $T_8 : P^3 \to \mathbb{R}^2$, $T_8(p) = \big(p(1), p(2)\big)$.

   $T_9 : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $T_9(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} -2x_1 - x_2 & x_1 - 2x_3 \\ -x_1 & x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

4. Sea $V$ el espacio vectorial formado por todos los números complejos. Entonces $V$ es tanto un $\mathbb{R}$-espacio vectorial como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Encontrar una transformación $T$ de $V$ en $V$ que sea $\mathbb{R}$-lineal pero no $\mathbb{C}$-lineal.

5. Encontrar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,-1,1) = (1,0)$, $T(1,1,1) = (0,1)$.

6. Determinar si es verdadero o falso:
   (a) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, entonces $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Nu}\,(\mathrm{T}) \oplus \mathrm{Im}\,(\mathrm{T})$ (suma directa de subespacios).
   (b) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que tal que $T(\alpha_i) = \beta_i$, con

   $\alpha_1 = (1,-1)$ $\alpha_2 = (2,-1)$ $\alpha_3 = (-3,2)$

   $\beta_1 = (1,0)$ $\beta_2 = (0,1)$ $\beta_3 = (1,1)$

   (c) Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $K$ de dimensión $n$ y $m$ respectivamente. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y $n > m$, entonces $T$ no es inyectiva.
   (d) Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $K$ de dimensión $n$ y $m$ respectivamente. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y $n < m$, entonces $T$ no es suryectica.

7. Sea $V$ el espacio vectorial de todas las matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ y sea $A$ una matriz fija. Sean $T_A$ y $S_A$ las aplicaciones de $V$ en $V$ definidas por $T_A(X) = AX$ y $S_A(X) = AX - XA$.
   (a) Demostrar que $T_A$ y $S_A$ son transformaciones lineales.
   (b) Sea $n = 2$ y sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular $\mathrm{Nu}\,(\mathrm{T_A})$ e $\mathrm{Im}\,(\mathrm{T_A})$ y $\mathrm{Nu}\,(\mathrm{S_A})$ e $\mathrm{Im}\,(\mathrm{S_A})$.

8. Dar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que su imagen sea el subespacio generado por $(1,0,-1)$ y $(1,2,2)$.

9. Sea $P_n$ el espacio de todas las funciones polinomiales de grado menor o igual a $n$ sobre $\mathbb{R}$. ¿Cuáles de las siguientes transformaciones lineales son isomorfismos?

   (a) $T(p(x)) = p'(x)$ (b) $T(p(x)) = xp'(x)$ (c) $T(p(x)) = p(x-1)$ (d) $T(p(x)) = p(x) + p'(x)$

10. Sean $T$ y $U$ operadores lineales en $\mathbb{R}^2$ definidos por
$$T(x_1, x_2) = (x_2, x_1), \qquad U(x_1, x_2) = (x_1, 0).$$
Calcular $2T + 3U$, $U + T$, $UT$, $TU$, $T^2$ y $U^2$.

11. Dar una fórmula para la composiciones $T_1 \circ T_6$ y $T_9 \circ T_2$ del ejercicio (5).

12. Determinar si las siguientes transformaciones son inversibles y en caso de serlo averiguar la inversa.
   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$.
   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x_1, x_2) = (3x_1, x_1 - x_2)$.
   (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$.

13. Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la única transformación lineal definida por
$$T(e_1) = (1, 0, i), \qquad T(e_2) = (0, 1, 1), \qquad T(e_3) = (i, 1, 0).$$
Encontrar una expresión de $T$ de la forma $T(z_1, z_2, z_3)$. Determinar si $T$ es inversible.

14. Encontrar un isomorfismo entre
   (a) $\mathbb{R}^{mn}$ y $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
   (b) $\mathbb{R}^{2n}$ y $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.
   (c) $\mathbb{R}^3$ y $\{A \in M_{2\times 2} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$.

15. Para las siguientes transformaciones lineales hallar su matriz respecto de las bases canónicas de los $\mathbb{R}^n$ que correspondan.
   (a) $T_1(x, y, z) = (3x - 2y, 2x + 2y, y - z)$.
   (b) $T_2(x, y, z) = (y, x - 3z)$.
   (c) $T_3(x, y, z) = (x, x, x, x, x)$.
   (d) $T_4(x, y, z, w, u, v) = (x, 3y - u + 2z - 4v, x, z, w, u)$.

16. Usando las definiciones del ejercicio anterior, hallar la composición $T_2T_1$. Verificar que la matriz $T_2T_1$ respecto a las bases canónicas es el producto de la matrices de $T_2$ y $T_1$. Repetir para $T_4T_3$ y $T_3T_4$.

17. Sea $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$
   (a) Calcular la matriz de la rotación de 30° en sentido horario.
   (b) Calcular la matriz de la reflexión con respecto al eje $y = -2x$.

18. Sea $T$ la transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ definida como $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$.
   (a) ¿Cuál es la matriz de $T$ en la base canónica?
   (b) ¿Cuál es la matriz de $T$ en la base $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, -1)\}$?
   (c) ¿Qué representa $T$ geométricamente?

19. Calcular la matriz de $T_1$ del ejercicio (17) con respecto a la base $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, -1), (2, 1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Calcular la matriz de $T_2$ del ejercicio (17) con respecto a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2 = \{(2, 1), (-1, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

20. Sea $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (-1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$ y sea $T$ una transformación lineal en $\mathbb{R}^3$ definida por
$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3).$$
   (a) Determinar las matrices de $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ y $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$?
   (b) Probar que $T$ es invertible y calcular $T^{-1}$.

21. Calcular la matriz de $T_A$ y $S_A$ del ejercicio (8b) con respecto a la base canónica de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

22. Sea $P_n$ el espacio de polinomios de grado menor o igual a $n$, y sea $T$ la transformación lineal de $P_2$ en $P_1$ definida por
$$T(ax^2 + bx + c) = (a + b)x + 2c - a.$$
(a) Si $\mathcal{B} = \{x^2, x, 1\}$ y $\mathcal{B}' = \{x, 1\}$ ¿Cuál es la matriz de $T$ respecto a $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$?
(b) Si $\mathcal{B} = \{x^2 + 1, x^2 + x + 1, x^2\}$ y $\mathcal{B}' = \{1, x\}$ ¿Cuál es la matriz de $T$ respecto a $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$?

23. Sean en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, -2)$, $\alpha_3 = (-1, -1, 0)$.
(a) Si $f$ es la funcional lineal sobre $\mathbb{R}^3$ tal que
$$f(\alpha_1) = 1, \quad f(\alpha_2) = -1, \quad f(\alpha_3) = 3.$$
Sea $\alpha = (a, b, c)$, encontrar $f(\alpha)$.
(b) Encontrar una funcional lineal tal que $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$, pero $f(\alpha_3) \neq 0$.

## Ejercicios adicionales

24. Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión $n$ y sea $T$ una transformación lineal tal que $\mathrm{Nu}\,(\mathrm{T}) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{T})$.
(a) Probar que $n$ es par.
(b) Dar un ejemplo de esta situación.

25. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $R_a$ la recta $y = ax$ de pendiente $a$ en $\mathbb{R}^2$. Sea $S_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la reflexión con respecto a $R_a$. Encontrar $S_a(x, y)$.

26. Sea $g \in C^1[0, 1]$ ($g$ es una función con derivada continua en el intervalo $[0, 1]$). Definimos $T : C^1[0, 1] \to C^1[0, 1]$ por $T(f) = (fg)'$.
(a) Probar que $T$ es lineal.
(b) Supongamos que, además, $g$ es una función siempre positiva, es decir $g(x) > 0$ para todo $x \in [0, 1]$. En ese caso calcular el núcleo de $T$ y dar su dimensión.

27. Encontrar dos transformaciones lineales $T$ y $U$ de un espacio vectorial en si mismo tales que $TU = 0$, pero $UT \neq 0$

28. Sea $V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $K$ y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Si $T^2 = 0$ ¿qué se puede decir sobre la relación que hay entre $\mathrm{Im}\,(\mathrm{T})$ y $\mathrm{Nu}\,(\mathrm{T})$? Dar un ejemplo en que $T \neq 0$ y $T^2 = 0$.

29. Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Sea $T : V \to W$ una función que cumple $T(x + y) = T(x) + T(y)$, para todo $x, y \in V$, y $T(cx) = cT(x)$, para todo $x \in V$ y $c \geq 0$. Entonces $T$ es lineal.

30. Sea $T$ una transformación lineal en $\mathbb{C}^2$ definida como $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Sea $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{C}^2$ y $\mathcal{B}'$ la base ordenada $\{(1, -i), (-i, 2)\}$.
(a) ¿Cuál es la matriz de $T$ respecto a las bases $\mathcal{B}$,$\mathcal{B}'$?
(b) ¿Cuál es la matriz de $T$ respecto a las bases $\mathcal{B}'$,$\mathcal{B}$?
(c) ¿Cuál es la matriz de $T$ respecto a la base $\mathcal{B}$?
(d) ¿Cuál es la matriz de $T$ respecto a la base $\mathcal{B}'$?