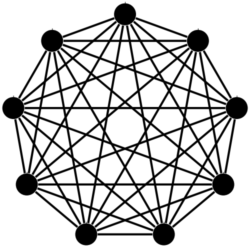
Aplicación de anillos de polinomios a la descomposición de grafos

Adrián Pastine
TAG-UNSL

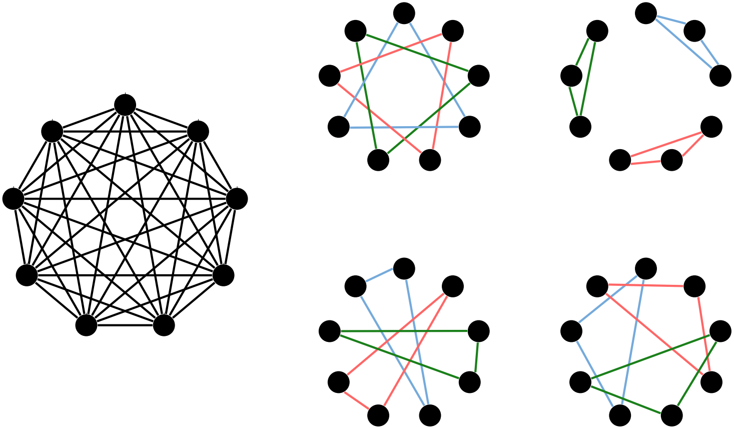
Trabajo conjunto con: Melissa S. Keranen,
Michigan Technological University

19 de Octubre, 2017

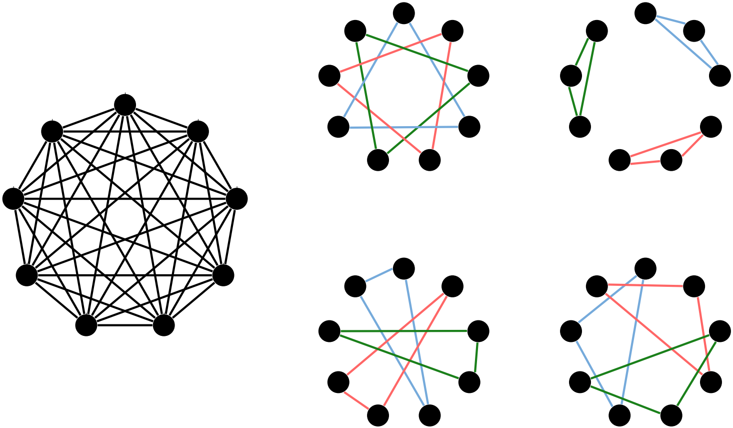
K_9 en 4 C_3-factores



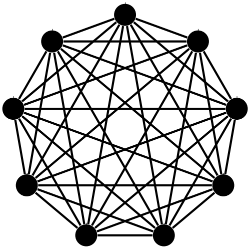
K_9 en 4 C_3-factores

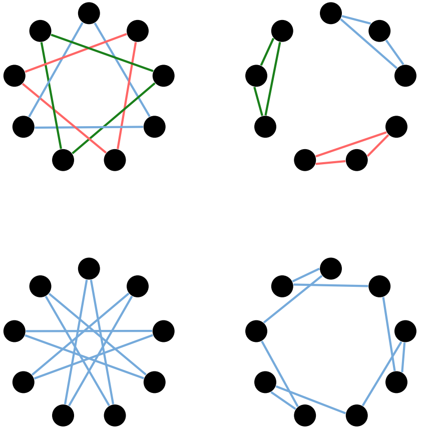


K_9 en 4 C_3-factores y 0 C_9-factores

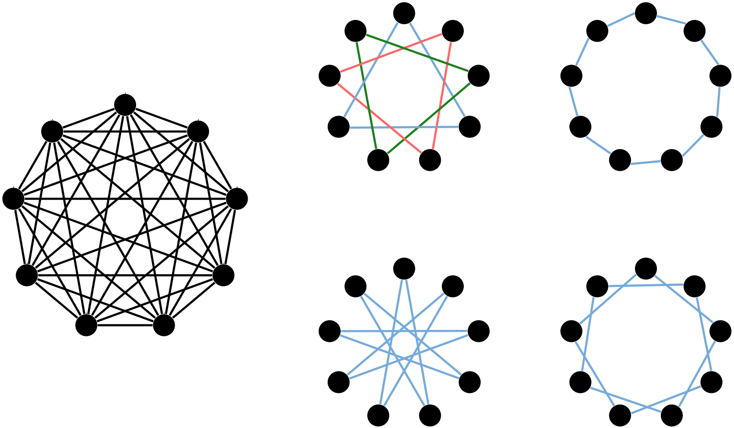


K_9 en 2 C_3-factores y 2 C_9-factores

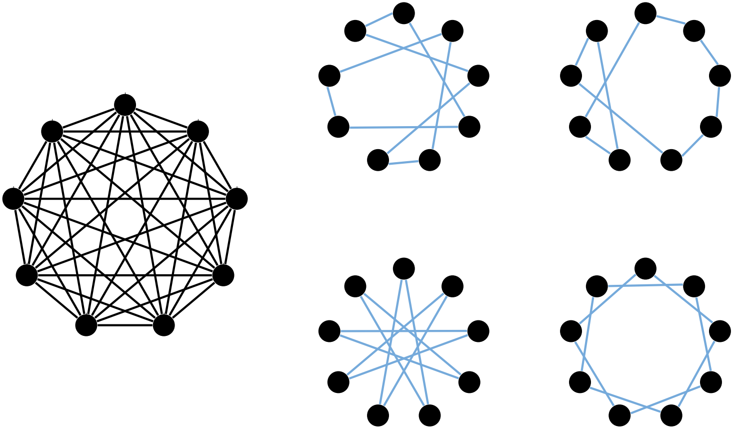




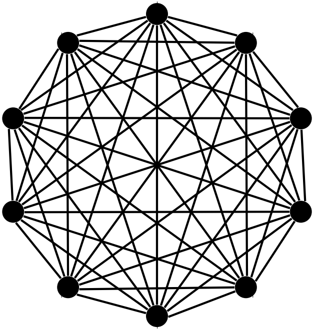
K_9 en 1 C_3-factor y 3 C_9-factores



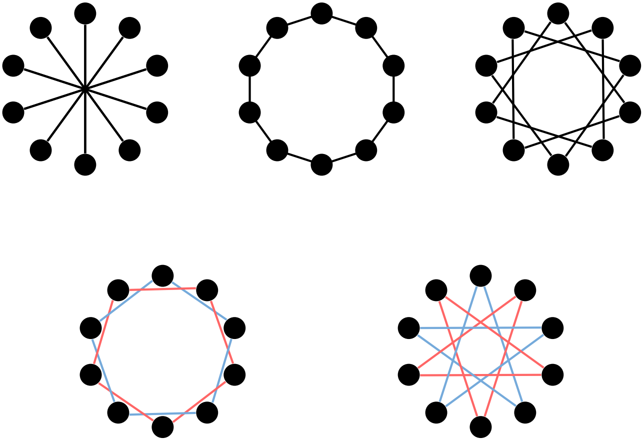
K_9 en 0 C_3-factores y 4 C_9-factores



K_{10} en un 1-factor, 2 C_{10}-factores, y 2 C_5-factores



K_{10} en un 1-factor, 2 C_{10}-factores, y 2 C_5-factores



El problema de Hamilton-Waterloo uniforme para Grafos Completos

Question

Dados m, x e y, tales que x e y dividen a m, el problema de Hamilton-Waterloo uniforme pregunta si se puede descomponer K_m en r C_x-factores y s C_y-factores (y un 1-factor) para todo $r + s = (m-1)/2$ $(r + s = (m-2)/2)$?

El problema de Hamilton-Waterloo uniforme para Grafos Completos

Question

Dados m, x e y, tales que x e y dividen a m, el problema de Hamilton-Waterloo uniforme pregunta si se puede descomponer K_m en r C_x-factores y s C_y-factores (y un 1-factor) para todo $r + s = (m-1)/2$ ($r + s = (m-2)/2$)?

- Resuelto si x, y impares, $\gcd(x, y) = 1$.
- Resuelto si x, y pares.

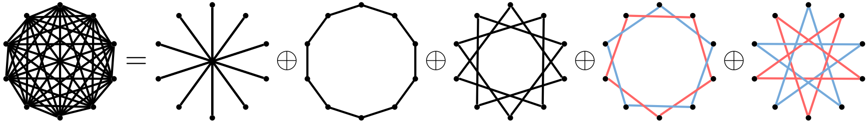
El problema de Hamilton-Waterloo uniforme para Grafos Completos

Question

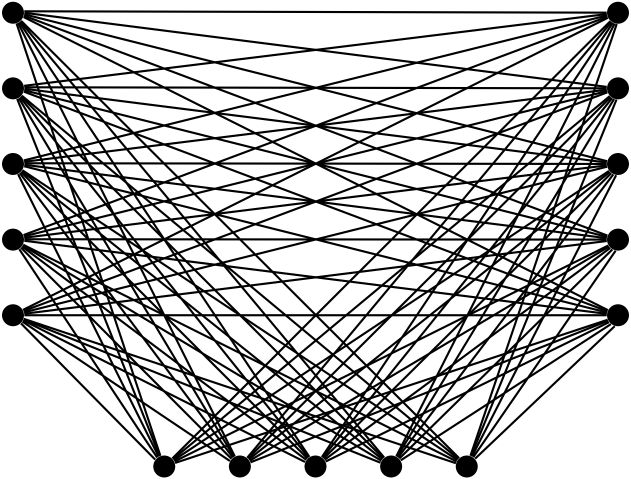
Dados m, x e y, tales que x e y dividen a m, el problema de Hamilton-Waterloo uniforme pregunta si se puede descomponer K_m en r C_x-factores y s C_y-factores (y un 1-factor) para todo $r + s = (m-1)/2$ $(r + s = (m-2)/2)$?

- Resuelto si x, y impares, $\gcd(x, y) = 1$.
- Resuelto si x, y pares.
- Vamos a trabajar en x, y tales que $\gcd(x, y) \geq 3$, con y impar, pero permitiendo x par o impar.

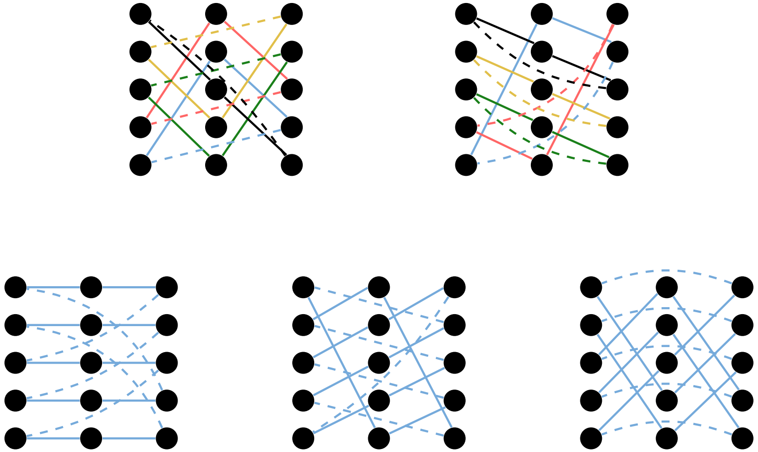
notación $\bigoplus$



$K_{(5:3)}$ en 2 C_3-factores y 3 C_{15}-factores



$K_{(5:3)}$ en 2 C_3-factores y 3 C_{15}-factores



Resultados Conocidos Necesarios

Theorem (Alspach y Haggkvist, 1985; Alspach, Schellenberg, Stinson y Wagner, 1989; Hoffman y Schellenberg 1991; Ray-Chadhuri y Wilson, 1971)

K_m (o $K_m - F$ si m es par) puede ser descompuesto en C_x-factores si y solo si $m \equiv 0 \pmod{x}$, $(m, x) \neq (6, 3)$ y $(m, x) \neq (12, 3)$.

Resultados Conocidos Necesarios

Theorem (Alspach y Haggkvist, 1985; Alspach, Schellenberg, Stinson y Wagner, 1989; Hoffman y Schellenberg 1991; Ray-Chadhuri y Wilson, 1971)

K_m (o $K_m - F$ si m es par) puede ser descompuesto en C_x-factores si y solo si $m \equiv 0 \pmod{x}$, $(m, x) \neq (6, 3)$ y $(m, x) \neq (12, 3)$.

Theorem (Liu)

Si $x \geq 3$ y $t \geq 2$, $K_{(m:t)}$ puede ser descompuesto en C_x-factores si y solo si (mt) es divisible por x, $m(t-1)$ es par, c es par si $t = 2$, y $(m, t, c) \notin \{(2,3,3), (6,3,3), (2,6,3), (6,2,6)\}$.

Esqueleto de la construcción

Para descomponer K_m en C_x-factores y C_y-factores.

Esqueleto de la construcción

Para descomponer K_m en C_x-factores y C_y-factores. Siendo $\gcd(x, y) \geq 3$, $x_1 = x/\gcd(x, y)$, $y_1 = y/\gcd(x, y)$, $v/\gcd(x, y)x_1y_1 \geq 3$.

Esqueleto de la construcción

Para descomponer K_m en C_x-factores y C_y-factores. Siendo $\gcd(x,y) \geq 3$, $x_1 = x/\gcd(x,y)$, $y_1 = y/\gcd(x,y)$, $v/\gcd(x,y)x_1y_1 \geq 3$.

- Tomamos $t = m/x_1y_1\gcd(x,y)$,

Esqueleto de la construcción

Para descomponer K_m en C_x-factores y C_y-factores. Siendo $\gcd(x,y) \geq 3$, $x_1 = x/\gcd(x,y)$, $y_1 = y/\gcd(x,y)$, $v/\gcd(x,y)x_1y_1 \geq 3$.

- Tomamos $t = m/x_1y_1\gcd(x,y)$,
- consideramos $K_{(\gcd(x,y):t)}$,

Esqueleto de la construcción

Para descomponer K_m en C_x-factores y C_y-factores. Siendo $\gcd(x,y) \geq 3$, $x_1 = x/\gcd(x,y)$, $y_1 = y/\gcd(x,y)$, $v/\gcd(x,y)x_1y_1 \geq 3$.

- Tomamos $t = m/x_1y_1\gcd(x,y)$,
- consideramos $K_{(\gcd(x,y):t)}$,
- descomponemos $K_{(\gcd(x,y):t)}$ en $C_{\gcd(x,y)}$-factores,

Esqueleto de la construcción

Para descomponer K_m en C_x-factores y C_y-factores. Siendo $\gcd(x,y) \geq 3$, $x_1 = x/\gcd(x,y)$, $y_1 = y/\gcd(x,y)$, $v/\gcd(x,y)x_1y_1 \geq 3$.

- Tomamos $t = m/x_1y_1 \gcd(x,y)$,
- consideramos $K_{(\gcd(x,y):t)}$,
- descomponemos $K_{(\gcd(x,y):t)}$ en $C_{\gcd(x,y)}$-factores,
- damos peso x_1y_1 a cada vértice,

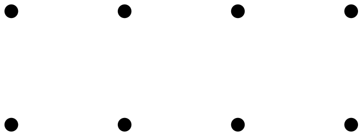
Esqueleto de la construcción

Para descomponer K_m en C_x-factores y C_y-factores. Siendo $\gcd(x,y) \geq 3$, $x_1 = x/\gcd(x,y)$, $y_1 = y/\gcd(x,y)$, $v/\gcd(x,y)x_1y_1 \geq 3$.

- Tomamos $t = m/x_1y_1\gcd(x,y)$,
- consideramos $K_{(\gcd(x,y):t)}$,
- descomponemos $K_{(\gcd(x,y):t)}$ en $C_{\gcd(x,y)}$-factores,
- damos peso x_1y_1 a cada vértice,
- descomponemos cada $K_{\gcd(x,y)x_1y_1}$ en C_x-factores o en C_y-factores, y busco las descomposiciones necesarias de los $C_{\gcd(x,y)}$-factores luego de darles peso.

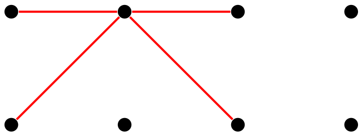
$C_{(2:4)}$

$$G = C_{(2:4)}$$



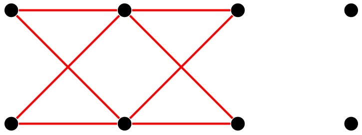
$C_{(2:4)}$

$$G = C_{(2:4)}$$



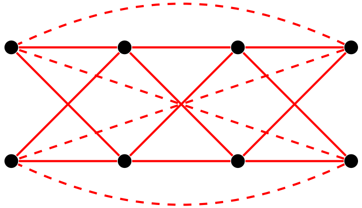
$C_{(2:4)}$

$G = C_{(2:4)}$

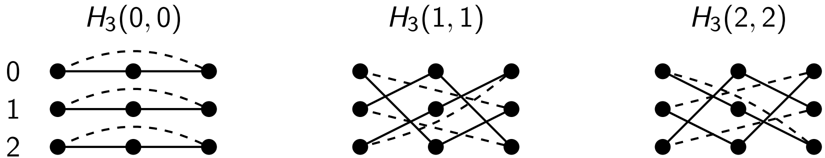


$C_{(2:4)}$

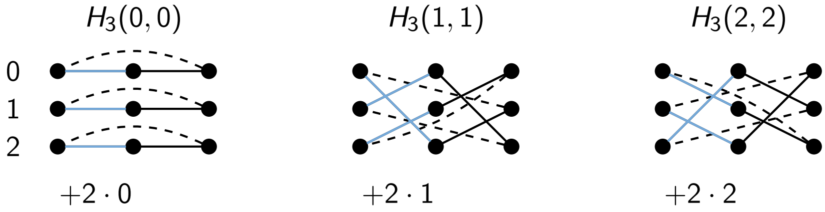
$$G = C_{(2:4)}$$



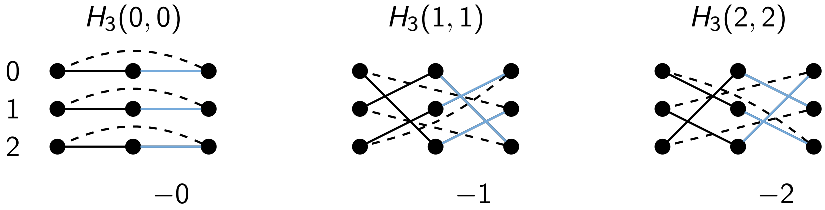
$C_{(3:3)}$ en 3 C_3-factores, y $C_{(3:3)}$ en 1 C_3-factor and 2 C_9-factores



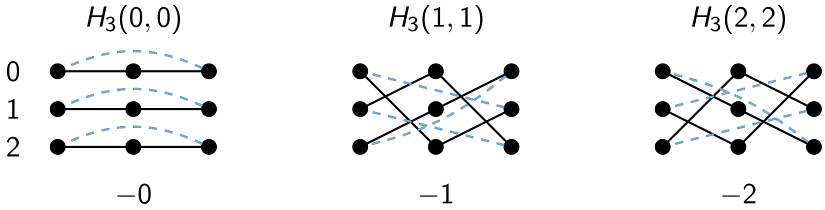
$C_{(3:3)}$ en 3 C_3-factores, y $C_{(3:3)}$ en 1 C_3-factor and 2 C_9-factores



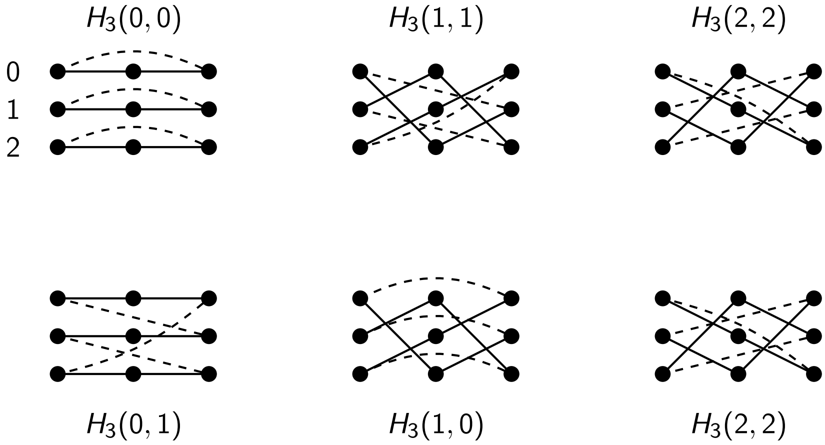
$C_{(3:3)}$ en 3 C_3-factores, y $C_{(3:3)}$ en 1 C_3-factor and 2 C_9-factores



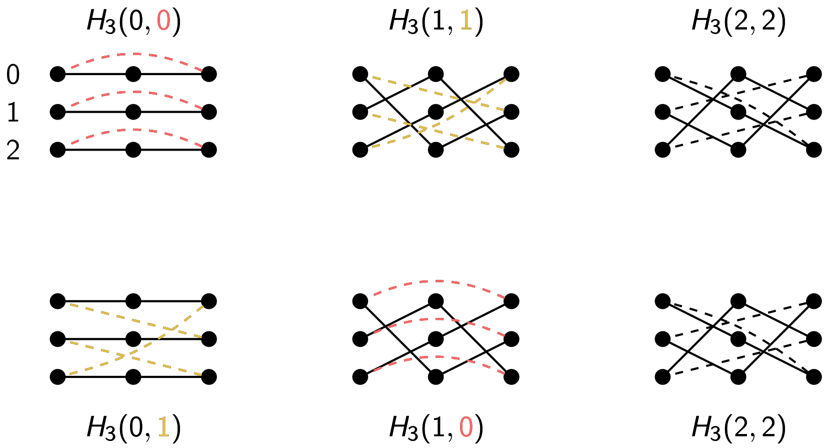
$C_{(3:3)}$ en 3 C_3-factores, y $C_{(3:3)}$ en 1 C_3-factor and 2 C_9-factores



$C_{(3:3)}$ en 3 C_3-factores, y $C_{(3:3)}$ en 1 C_3-factor and 2 C_9-factores



$C_{(3:3)}$ en 3 C_3-factores, y $C_{(3:3)}$ en 1 C_3-factor and 2 C_9-factores



Usando la notación $\bigoplus$

$$C_{(3:3)} = H_3(0,0) \oplus H_3(1,1) \oplus H_3(2,2)$$

Usando la notación $\bigoplus$

$$
\begin{aligned}
C_{(3:3)} &= H_3(0,0) \oplus H_3(1,1) \oplus H_3(2,2) \\
&= H_3(0,1) \oplus H_3(1,0) \oplus H_3(2,2)
\end{aligned}
$$

Usando la notación $\bigoplus$

$$
\begin{aligned}
C_{(3:3)} &= H_3(0,0) \oplus H_3(1,1) \oplus H_3(2,2) \\
&= H_3(0,1) \oplus H_3(1,0) \oplus H_3(2,2) \\
H_3(0,0) \oplus H_3(1,1) &= H_3(0,1) \oplus H_3(1,0)
\end{aligned}
$$

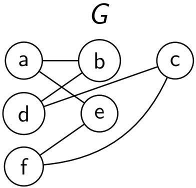
Usando la notación $\bigoplus$

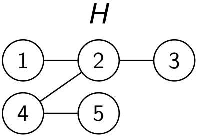
$$
\begin{aligned}
C_{(3:3)} &= H_3(0,0) \oplus H_3(1,1) \oplus H_3(2,2) \\
&= H_3(0,1) \oplus H_3(1,0) \oplus H_3(2,2) \\
H_3(0,0) \oplus H_3(1,1) &= H_3(0,1) \oplus H_3(1,0)
\end{aligned}
$$

Si ϕ es una permutación de $\{0, 1, ..., x_1 - 1\}$, entonces:

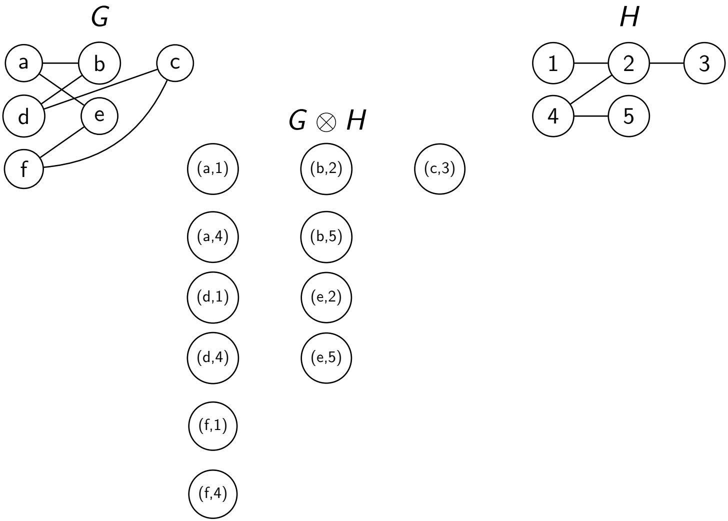
$$C_{(x_1:t)} = \bigoplus_{i=0}^{x_1-1} H_{x_1}(i, \phi(i))$$

El Producto Multipartito

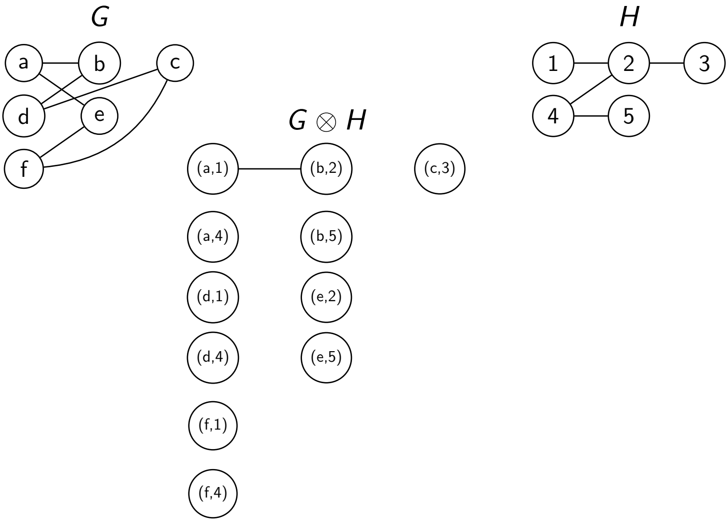




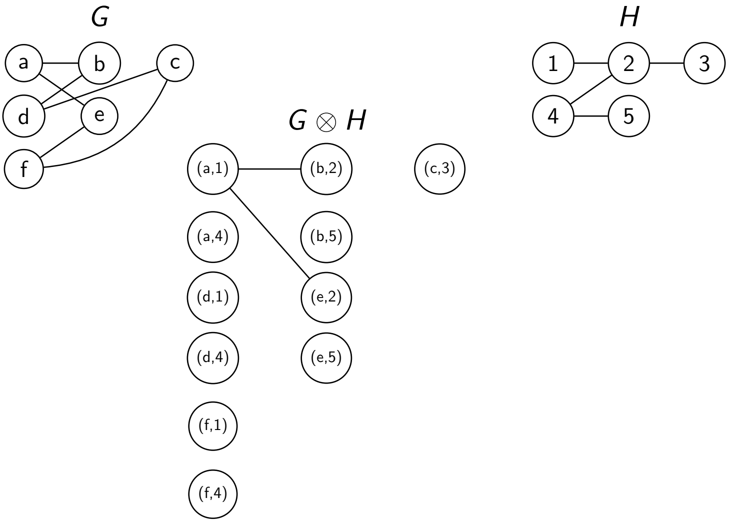
El Producto Multipartito



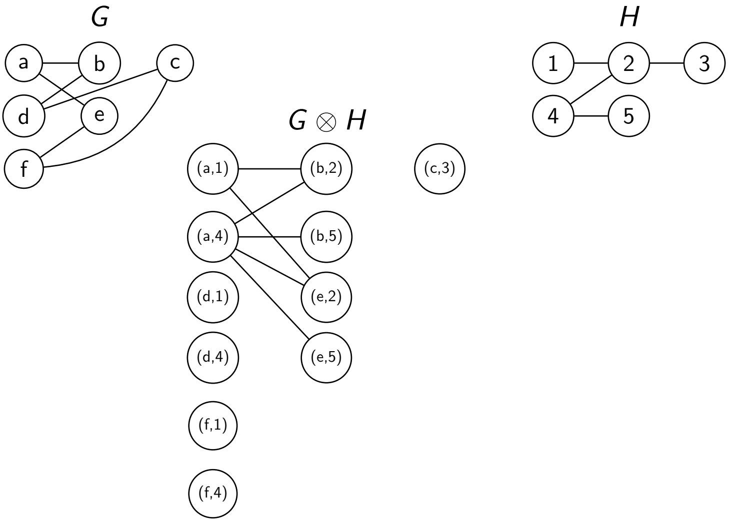
El Producto Multipartito



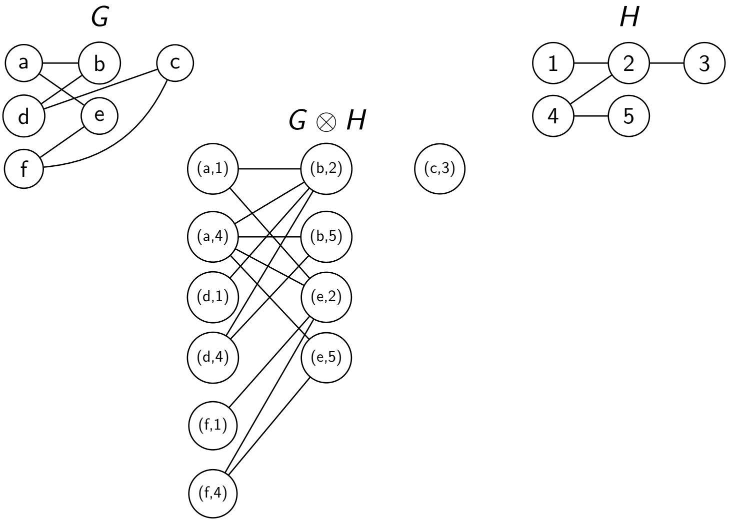
El Producto Multipartito



El Producto Multipartito



El Producto Multipartito



Sobre el producto

Theorem (KP)

Sean $G = \oplus_i G_i$ *y* $H = \oplus_j H_j$ *grafos t-partitos. Entonces* $G \otimes H = (\oplus_i G_i) \otimes (\oplus_j H_j)$. *Además tenemos la siguiente propiedad distributiva:*

$$(\oplus_i G_i) \otimes (\oplus_j H_j) = \oplus_i (G_i \otimes \oplus_j H_j) = \oplus_i \oplus_j (G_i \otimes H_j)$$

Sobre el producto

Theorem (KP)

Sean $G = \oplus_i G_i$ *y* $H = \oplus_j H_j$ *grafos t-partitos. Entonces* $G \otimes H = (\oplus_i G_i) \otimes (\oplus_j H_j)$*. Además tenemos la siguiente propiedad distributiva:*

$$(\oplus_i G_i) \otimes (\oplus_j H_j) = \oplus_i (G_i \otimes \oplus_j H_j) = \oplus_i \oplus_j (G_i \otimes H_j)$$

Lemma (KP)

Sea G *un* C_x*-factor de* $C_{(m:t)}$*, y sea* H *un* C_y*-factor de* $C_{(n:t)}$*. Entonces* $G \otimes H$ *es un* C_l*-factor de* $C_{(xy:t)}$*, donde* $l = \frac{xy}{gcd(x,y)}$*.*

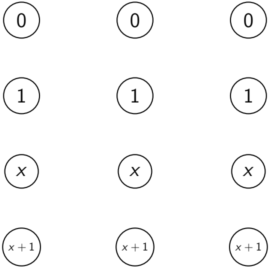
Usando Anillos de Polinomios

Vamos a descomponer $C_{(4^k:t)}$ en $C_{2^k t}$-factores y C_t-factores.

Usando Anillos de Polinomios

Consideramos el anillo $R = \mathbb{Z}_{2^k}[x]/(x^2 + x + 1)$. Etiquetamos los vértices de $C_{(4^k:t)}$ con los elementos de R.

Usando Anillos de Polinomios



Usando Anillos de Polinomios

Para cada $\alpha \in R$, definimos la biyección $f_\alpha(y) = xy + \alpha$. Notamos que $f_\beta \circ f_\alpha^2(y) = y - \alpha + \beta$, $f_\alpha^3(y) = y$.

Usando Anillos de Polinomios

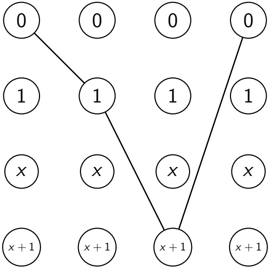
Para cada $\alpha \in R$, definimos la biyección $f_\alpha(y) = xy + \alpha$. Notamos que $f_\beta \circ f_\alpha^2(y) = y - \alpha + \beta$, $f_\alpha^3(y) = y$.

$$
\begin{aligned}
f_\alpha(y) &= xy + \alpha \\
f_\alpha^2(y) &= x(xy + \alpha) + \alpha \\
&= x^2y + x\alpha + \alpha \\
&= -xy - y + x\alpha + \alpha \\
f_\beta \circ f_\alpha^2(y) &= x(-xy - y + x\alpha + \alpha) + \beta \\
&= -x^2y - xy + x^2\alpha + x\alpha + \beta \\
&= xy + y - xy + (x^2 + x)\alpha + \beta \\
&= y - \alpha + \beta
\end{aligned}
$$

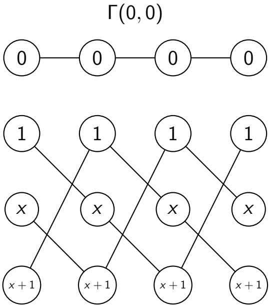
Usando Anillos de Polinomios

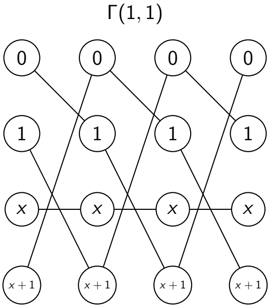
Para cada $\alpha \in R$, definimos la biyección $f_\alpha(y) = xy + \alpha$. Notamos que $f_\beta \circ f_\alpha^2(y) = y - \alpha + \beta$, $f_\alpha^3(y) = y$.

$f_1(y) = xy + 1$



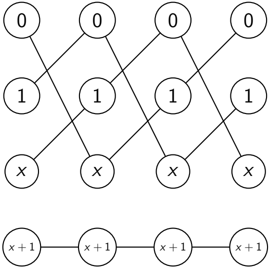
Usando Anillos de Polinomios



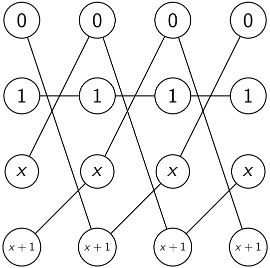


Usando Anillos de Polinomios

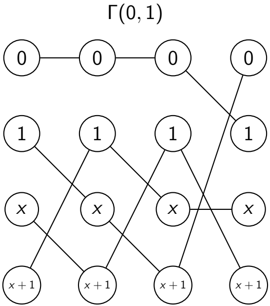
$\Gamma(x, x)$

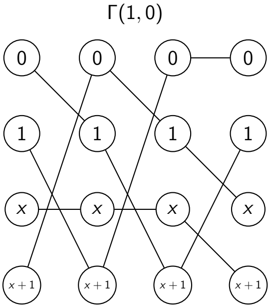


$\Gamma(x+1, x+1)$



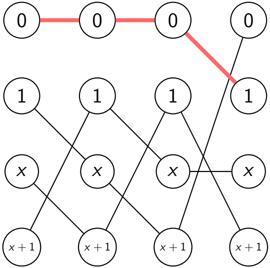
Usando Anillos de Polinomios



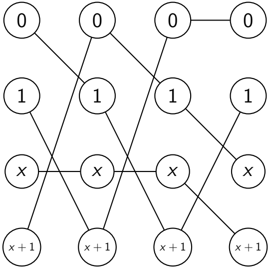


Usando Anillos de Polinomios

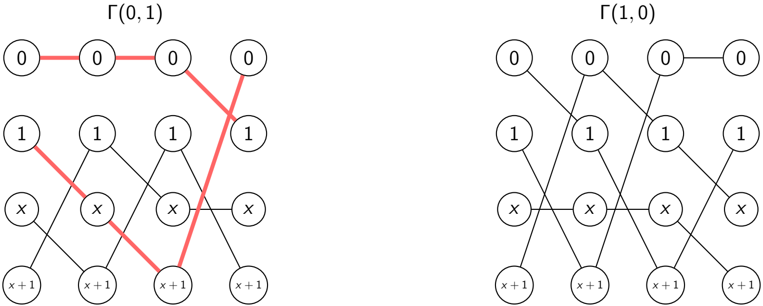
$\Gamma(0,1)$



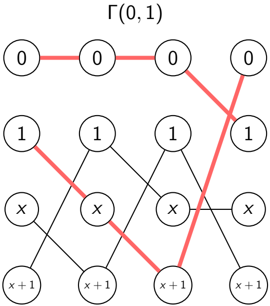
$\Gamma(1,0)$

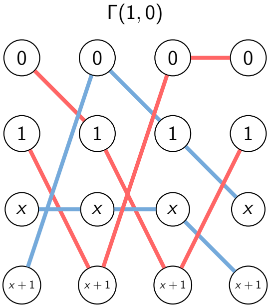


Usando Anillos de Polinomios



Usando Anillos de Polinomios





Usando Anillos de Polinomios

Si φ es una permutación de R, entonces $\bigoplus_{\alpha \in R} \Gamma(\alpha, \varphi(\alpha))$ es una descomposición en $C_{2^k t}$-factores y C_t-factores.

Resultado Principal

Theorem (KP)

Sean $m, k, x,$ e y enteros positivos con $\dfrac{m\,\text{gcd}(x,y)}{4^k xy} \geq 3$ entero, $\text{gcd}(x,y) \geq 3$, x, y impares. Entonces existe una descomposición de K_m en s $C_{2^k x}$-factores, r C_y-factores y un 1-factor para todo $s, r \neq 1$.

Chas Gracias!!

cordoba.jpg