

Colímites homotópicos de posets

Ximena Fernández

Trabajo en conjunto con Elías Gabriel Minian

Departamento de Matemática
Universidad de Buenos Aires.

eIENA VII

La Falda - 5 de agosto de 2014

Diagramas

Sean \mathcal{J} una categoría pequeña, \mathcal{C} una categoría.

Diagramas

Sean \mathcal{J} una categoría pequeña, \mathcal{C} una categoría.

Un **diagrama** en \mathcal{C} indexado en \mathcal{J} es un funtor $X : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$.

Diagramas

Sean \mathcal{J} una categoría pequeña, \mathcal{C} una categoría.

Un **diagrama** en \mathcal{C} indexado en \mathcal{J} es un funtor $X : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$.

Categoría \mathcal{J}

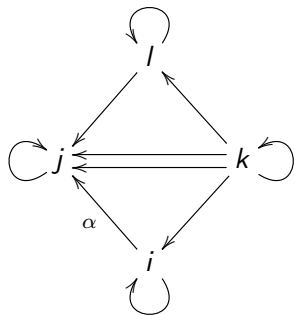
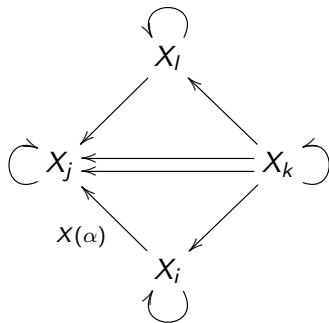


Diagrama en \mathcal{C} indexado en \mathcal{J}



Colímites

Sea X un \mathcal{J} -diagrama en \mathcal{C} .

Colímites

Sea X un \mathcal{J} -diagrama en \mathcal{C} .
 $\operatorname{colim}(X)$, si existe, es un objeto de \mathcal{C}

Colímites

Sea X un \mathcal{J} -diagrama en \mathcal{C} .

$\operatorname{colim}(X)$, si existe, es un objeto de \mathcal{C} , junto con morfismos

$\phi_j : X_j \rightarrow \operatorname{colim} X$ para todo $j \in \mathcal{J}$

Colímites

Sea X un \mathcal{J} -diagrama en \mathcal{C} .

$\text{colim}(X)$, si existe, es un objeto de \mathcal{C} , junto con morfismos

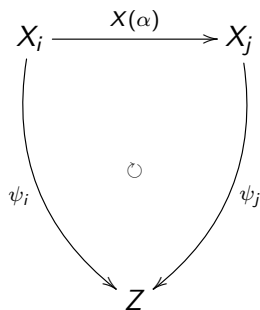
$\phi_j : X_j \rightarrow \text{colim}X$ para todo $j \in \mathcal{J}$, de modo que

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{X(\alpha)} & X_j \\ & \searrow \phi_i & \swarrow \phi_j \\ & \text{colim}(X) & \end{array}$$

Colímites

Sea X un \mathcal{J} -diagrama en \mathcal{C} .

$\text{colim}(X)$, si existe, es un objeto de \mathcal{C} , junto con morfismos $\phi_j : X_j \rightarrow \text{colim}X$ para todo $j \in \mathcal{J}$, de modo que

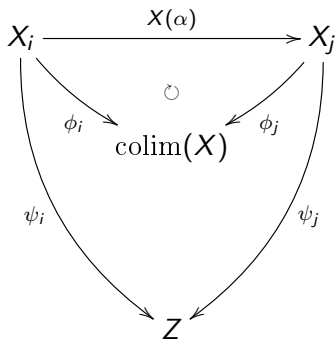


Colímites

Sea X un \mathcal{J} -diagrama en \mathcal{C} .

$\text{colim}(X)$, si existe, es un objeto de \mathcal{C} , junto con morfismos

$\phi_j : X_j \rightarrow \text{colim} X$ para todo $j \in \mathcal{J}$, de modo que

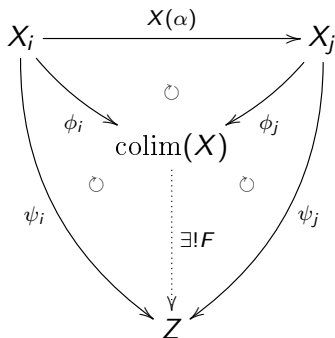


Colímites

Sea X un \mathcal{J} -diagrama en \mathcal{C} .

$\text{colim}(X)$, si existe, es un objeto de \mathcal{C} , junto con morfismos

$\phi_j : X_j \rightarrow \text{colim} X$ para todo $j \in \mathcal{J}$, de modo que



Colímites de diagramas de espacios topológicos

Sea $X : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{S}$ un \mathcal{J} -diagrama de espacios topológicos.

Colímites de diagramas de espacios topológicos

Sea $X : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{S}$ un \mathcal{J} -diagrama de espacios topológicos.

Entonces $\operatorname{colim} X \in \mathcal{S}$ existe y es homeomorfo a

$$\bigsqcup_{j \in \mathcal{J}} X_j / \sim$$

donde para cada $\alpha : i \rightarrow j$ en \mathcal{J}

$$\begin{aligned} X_i &\xrightarrow{X(\alpha)} X_j \\ x &\longmapsto X(\alpha)(x) \\ x &\sim X(\alpha)(x) \end{aligned}$$

Morfismo de diagramas

Sean $X, Y : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ dos \mathcal{J} -diagramas en \mathcal{C} .

Morfismo de diagramas

Sean $X, Y : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ dos \mathcal{J} -diagramas en \mathcal{C} .

Un **morfismo de diagramas** $\varphi : X \rightarrow Y$ es

Morfismo de diagramas

Sean $X, Y : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ dos \mathcal{J} -diagramas en \mathcal{C} .

Un **morfismo de diagramas** $\varphi : X \rightarrow Y$ es una transformación natural entre los funtores X e Y .

Morfismo de diagramas

Sean $X, Y : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ dos \mathcal{J} -diagramas en \mathcal{C} .

Un **morfismo de diagramas** $\varphi : X \rightarrow Y$ es una transformación natural entre los funtores X e Y .

Es decir, una colección de morfismos $\varphi_j : X_j \rightarrow Y_j$ en \mathcal{C} indexada en \mathcal{J} , tal que

$$\begin{array}{ccc} & X_j & \xrightarrow{\varphi_j} & Y_j \\ & \uparrow X(\alpha) & \circlearrowleft & \uparrow Y(\alpha) \\ i & & & \\ & X_i & \xrightarrow{\varphi_i} & Y_i \end{array}$$

Morfismo de diagramas

Sean $X, Y : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ dos \mathcal{J} -diagramas en \mathcal{C} .

Un **morfismo de diagramas** $\varphi : X \rightarrow Y$ es una transformación natural entre los funtores X e Y .

Es decir, una colección de morfismos $\varphi_j : X_j \rightarrow Y_j$ en \mathcal{C} indexada en \mathcal{J} , tal que

$$\begin{array}{ccc} & X_j & \xrightarrow{\varphi_j} & Y_j \\ & \uparrow X(\alpha) & \circlearrowleft & \uparrow Y(\alpha) \\ i & & & \\ & X_i & \xrightarrow{\varphi_i} & Y_i \end{array}$$

The diagram shows a commutative square. On the left, a vertical arrow labeled α points from i to j . In the center, a square is formed by objects X_i and X_j at the bottom and top, and Y_i and Y_j at the bottom and top. Arrows connect $X_i \rightarrow X_j$ (labeled $X(\alpha)$), $X_j \rightarrow Y_j$ (labeled φ_j), $Y_j \rightarrow Y_i$ (labeled $Y(\alpha)$), and $X_i \rightarrow Y_i$ (labeled φ_i). A central circle with a dot indicates the commutativity of the square.

Un morfismo de diagramas $\varphi : X \rightarrow Y$ induce un morfismo $\hat{\varphi} : \operatorname{colim} X \rightarrow \operatorname{colim} Y$.

Problema

Sean $X, Y : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{S}$ dos \mathcal{J} -diagramas de espacios topológicos

Problema

Sean $X, Y : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{S}$ dos \mathcal{J} -diagramas de espacios topológicos y $\varphi : X \rightarrow Y$ un morfismo de diagramas.

Problema

Sean $X, Y : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{S}$ dos \mathcal{J} -diagramas de espacios topológicos y $\varphi : X \rightarrow Y$ un morfismo de diagramas.

$\varphi_j : X_j \rightarrow Y_j$ equivalencia homotópica para todo $j \in \mathcal{J}$

Problema

Sean $X, Y : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{S}$ dos \mathcal{J} -diagramas de espacios topológicos y $\varphi : X \rightarrow Y$ un morfismo de diagramas.

$\varphi_j : X_j \rightarrow Y_j$ equivalencia homotópica para todo $j \in \mathcal{J}$

$\Rightarrow \hat{\varphi} : \operatorname{colim} X \rightarrow \operatorname{colim} Y$ equivalencia homotópica!!!

Colímites homotópicos

Sean P un poset finito y $X : P \rightarrow \mathcal{S}$ un P -diagrama de espacios topológicos.

Colímites homotópicos

Sean P un poset finito y $X : P \rightarrow \mathcal{S}$ un P -diagrama de espacios topológicos. Entonces

$$\mathrm{hocolim} X \equiv \bigsqcup_{p \in P} X_p \times \mathcal{K}(F_p) / \sim$$

Colímites homotópicos

Sean P un poset finito y $X : P \rightarrow \mathcal{S}$ un P -diagrama de espacios topológicos. Entonces

$$\operatorname{hocolim} X \equiv \bigsqcup_{p \in P} X_p \times \mathcal{K}(F_p) / \sim$$

Para cada $p \leq q$ en P :

$$\begin{array}{ccc} X_p & \xrightarrow{f_{pq}} & X_q \\ x \mapsto & & f_{pq}(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(F_p) & \xleftarrow{i} & \mathcal{K}(F_q) \\ i(\alpha) & \longleftarrow & \alpha \end{array}$$

$$(x, i(\alpha)) \sim (f_{pq}(x), \alpha)$$

Teorema de Thomason versión posets (1979)

Dado $X : P \rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}$ un P -diagrama de posets finitos.

$\mathcal{K}X : P \rightarrow \mathcal{S}$ es un P -diagrama de espacios topológicos,
 $p \mapsto \mathcal{K}X_p$, el espacio clasificante del poset X_p .

Teorema de Thomason versión posets (1979)

Dado $X : P \rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}$ un P -diagrama de posets finitos.

$\mathcal{K}X : P \rightarrow \mathcal{S}$ es un P -diagrama de espacios topológicos,
 $p \mapsto \mathcal{K}X_j$, el espacio clasificante del poset X_j .

Entonces

$$\mathrm{hocolim} \mathcal{K}X \simeq \mathcal{K}(P \int X)$$

donde $P \int X$ es la construcción de Grothendieck sobre X .

Teorema de Thomason versión posets (1979)

Dado $X : P \rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}$ un P -diagrama de posets finitos.

$\mathcal{K}X : P \rightarrow \mathcal{S}$ es un P -diagrama de espacios topológicos,
 $p \mapsto \mathcal{K}X_j$, el espacio clasificante del poset X_j .

Entonces

$$\mathrm{hocolim} \mathcal{K}X \simeq \mathcal{K}(P \int X)$$

donde $P \int X$ es la construcción de Grothendieck sobre X .

Vale $P \int X := \underline{\mathrm{hocolim}} X \in \mathcal{P}_{<\infty}$ (*colímite homotópico no-Hausdorff* de X).

Teorema

Sea $K : P \rightarrow \mathcal{S}$ un P -diagrama de complejos simpliciales finitos.

Teorema

Sea $K : P \rightarrow \mathcal{S}$ un P -diagrama de complejos simpliciales finitos.

$\mathcal{X}(K) : P \rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}$ un P -diagrama de posets finitos.

$p \mapsto \mathcal{X}(K_p)$ el face poset de K_p .

Entonces,

$$\text{hocolim} K \simeq \mathcal{K}(\text{hocolim} \mathcal{X}(K))$$

Métodos de reducción de colímites homotópicos

$X : P \rightarrow \mathcal{P}_\infty$ un P -diagrama de posets finitos.

Métodos de reducción de colímites homotópicos

$X : P \rightarrow \mathcal{P}_\infty$ un P -diagrama de posets finitos.

- ▶ Si $p \in P$ es tal que $\mathcal{K}(\hat{F}_p)$ es contráctil (p es un *up γ -point*), entonces

$$\mathcal{K}(\underline{\text{hocolim}} X) \simeq \mathcal{K}(\underline{\text{hocolim}} X|_{P \setminus \{p\}}).$$

Métodos de reducción de colímites homotópicos

$X : P \rightarrow \mathcal{P}_\infty$ un P -diagrama de posets finitos.

- ▶ Si $p \in P$ es tal que $\mathcal{K}(\hat{F}_p)$ es contráctil (p es un *up γ -point*), entonces

$$\mathcal{K}(\text{hocolim} X) \simeq \mathcal{K}(\text{hocolim} X|_{P \setminus \{p\}}).$$

- ▶ Si $p \in P$ es tal que $\mathcal{K}(\hat{U}_p)$ es contráctil (p es un *down γ -point*)

Métodos de reducción de colímites homotópicos

$X : P \rightarrow \mathcal{P}_\infty$ un P -diagrama de posets finitos.

- ▶ Si $p \in P$ es tal que $\mathcal{K}(\hat{F}_p)$ es contráctil (p es un *up γ -point*), entonces

$$\mathcal{K}(\text{hocolim} X) \simeq \mathcal{K}(\text{hocolim} X|_{P \setminus \{p\}}).$$

- ▶ Si $p \in P$ es tal que $\mathcal{K}(\hat{U}_p)$ es contráctil (p es un *down γ -point*) y $\mathcal{K}(f_{qp}^{-1}(U_x))$ es contráctil para todo $q \leq p$ y para todo $x \in X_p$, entonces

$$\mathcal{K}(\text{hocolim} X) \simeq \mathcal{K}(\text{hocolim} X|_{P \setminus \{p\}}).$$

Métodos de reducción de colímites homotópicos

Corolario: Sea $K : P \rightarrow \mathcal{S}$ es un P -diagrama de complejos simpliciales.

Si P se puede llevar a un punto removiendo up o down γ -points y las funciones $f_{pq} : K_p \rightarrow K_q$ son *contractible mappings* (las fibras son contráctiles), entonces

$$\mathrm{hocolim} K \simeq K_p$$

para cualquier $p \in P$.

Métodos de reducción de colímites homotópicos

Ejemplo: $K : P \rightarrow S$ es un P -diagrama de complejos simpliciales y contractible mappings.

P es un poset γ -reducible.

Entonces $\text{hocolim} K \simeq K_p$ para cualquier $p \in P$.

