

Sobre la clasificación de ciertas categorías modulares íntegras

Julia Yael Plavnik ¹

Basado en un trabajo conjunto con P. Bruillard, C. Galindo, S.-M. Hong, Y. Kashina, D. Naidu, S. Natale y E. Rowell

¹Universidad de Buenos Aires
IMAS - CONICET

VII Encuentro Nacional de Álgebra
La Falda - 04 de Agosto de 2014

Categorías de fusión

Sea \mathbf{k} un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

Una categoría \mathcal{C} es una categoría de **fusión** sobre \mathbf{k} si:

- es una categoría **abeliana \mathbf{k} -lineal**: $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un \mathbf{k} -espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría **monoidal**: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{a}, \mathbf{1}, l, r)$,
- es **rígida**: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es **semisimple**: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- \mathcal{C} tiene una **cantidad finita** de clases de isomorfismo de objetos **simples**,
- los espacios de morfismos son de **dimensión finita**,
- $\mathbf{1}$ es un objeto **simple** de \mathcal{C} .

Categorías de fusión

Sea \mathbf{k} un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

Una categoría \mathcal{C} es una categoría de **fusión** sobre \mathbf{k} si:

- es una categoría **abeliana \mathbf{k} -lineal**: $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un \mathbf{k} -espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría **monoidal**: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{a}, \mathbf{1}, l, r)$,
- es **rígida**: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es **semisimple**: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- \mathcal{C} tiene una **cantidad finita** de clases de isomorfismo de objetos **simples**,
- los espacios de morfismos son de **dimensión finita**,
- $\mathbf{1}$ es un objeto **simple** de \mathcal{C} .

Categorías de fusión

Sea \mathbf{k} un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

Una categoría \mathcal{C} es una categoría de **fusión** sobre \mathbf{k} si:

- es una categoría **abeliana \mathbf{k} -lineal**: $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un \mathbf{k} -espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría **monoidal**: $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$,
- es **rígida**: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es **semisimple**: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- \mathcal{C} tiene una **cantidad finita** de clases de isomorfismo de objetos **simples**,
- los espacios de morfismos son de **dimensión finita**,
- $\mathbf{1}$ es un objeto **simple** de \mathcal{C} .

Categorías de fusión

Sea \mathbf{k} un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

Una categoría \mathcal{C} es una categoría de **fusión** sobre \mathbf{k} si:

- es una categoría **abeliana \mathbf{k} -lineal**: $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un \mathbf{k} -espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría **monoidal**: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{a}, \mathbf{1}, l, r)$,
- es **rígida**: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es **semisimple**: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- \mathcal{C} tiene una **cantidad finita** de clases de isomorfismo de objetos **simples**,
- los espacios de morfismos son de **dimensión finita**,
- $\mathbf{1}$ es un objeto **simple** de \mathcal{C} .

Categorías de fusión

Sea \mathbf{k} un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

Una categoría \mathcal{C} es una categoría de **fusión** sobre \mathbf{k} si:

- es una categoría **abeliana \mathbf{k} -lineal**: $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un \mathbf{k} -espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría **monoidal**: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{a}, \mathbf{1}, l, r)$,
- es **rígida**: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es **semisimple**: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- \mathcal{C} tiene una **cantidad finita** de clases de isomorfismo de objetos **simples**,
- los espacios de morfismos son de **dimensión finita**,
- $\mathbf{1}$ es un objeto **simple** de \mathcal{C} .

Categorías de fusión

Sea \mathbf{k} un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

Una categoría \mathcal{C} es una categoría de **fusión** sobre \mathbf{k} si:

- es una categoría **abeliana \mathbf{k} -lineal**: $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un \mathbf{k} -espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría **monoidal**: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{a}, \mathbf{1}, l, r)$,
- es **rígida**: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es **semisimple**: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- \mathcal{C} tiene una **cantidad finita** de clases de isomorfismo de objetos **simples**,
- los espacios de morfismos son de **dimensión finita**,
- $\mathbf{1}$ es un objeto **simple** de \mathcal{C} .

Categorías de fusión

Sea \mathbf{k} un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

Una categoría \mathcal{C} es una categoría de **fusión** sobre \mathbf{k} si:

- es una categoría **abeliana \mathbf{k} -lineal**: $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un \mathbf{k} -espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría **monoidal**: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{a}, \mathbf{1}, l, r)$,
- es **rígida**: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es **semisimple**: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- \mathcal{C} tiene una **cantidad finita** de clases de isomorfismo de objetos **simples**,
- los espacios de morfismos son de **dimensión finita**,
- $\mathbf{1}$ es un objeto **simple** de \mathcal{C} .

Categorías de fusión

Sea \mathbf{k} un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

Una categoría \mathcal{C} es una categoría de **fusión** sobre \mathbf{k} si:

- es una categoría **abeliana \mathbf{k} -lineal**: $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un \mathbf{k} -espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría **monoidal**: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{a}, \mathbf{1}, l, r)$,
- es **rígida**: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es **semisimple**: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- \mathcal{C} tiene una **cantidad finita** de clases de isomorfismo de objetos **simples**,
- los espacios de morfismos son de **dimensión finita**,
- $\mathbf{1}$ es un objeto **simple** de \mathcal{C} .

Categorías de fusión

Sea \mathbf{k} un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

Una categoría \mathcal{C} es una categoría de **fusión** sobre \mathbf{k} si:

- es una categoría **abeliana \mathbf{k} -lineal**: $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un \mathbf{k} -espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal,
- es una categoría **monoidal**: $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{a}, \mathbf{1}, l, r)$,
- es **rígida**: para todo $X \in \mathcal{C}$ existen duales a izquierda y a derecha,
- es **semisimple**: los objetos son sumas directas finitas de objetos simples,
- \mathcal{C} tiene una **cantidad finita** de clases de isomorfismo de objetos **simples**,
- los espacios de morfismos son de **dimensión finita**,
- $\mathbf{1}$ es un objeto **simple** de \mathcal{C} .

- Sea G un grupo finito. La categoría $\text{Rep}(G)$ de representaciones de dimensión finita de G sobre \mathbf{k} es una categoría de fusión.
- Sea G un grupo finito. La categoría Vec_G^ω de espacios vectoriales G -graduados de dimensión finita sobre \mathbf{k} con asociatividad determinada por un 3-cociclo ω es una categoría de fusión.
- Sea H un álgebra de Hopf semisimple de dimensión finita. La categoría $\text{Rep } H$ de representaciones de dimensión finita de H es una categoría de fusión.

- Sea G un grupo finito. La categoría $\text{Rep}(G)$ de representaciones de dimensión finita de G sobre \mathbf{k} es una categoría de fusión.
- Sea G un grupo finito. La categoría Vec_G^ω de espacios vectoriales G -graduados de dimensión finita sobre \mathbf{k} con asociatividad determinada por un 3-cociclo ω es una categoría de fusión.
- Sea H un álgebra de Hopf semisimple de dimensión finita. La categoría $\text{Rep } H$ de representaciones de dimensión finita de H es una categoría de fusión.

- Sea G un grupo finito. La categoría $\text{Rep}(G)$ de representaciones de dimensión finita de G sobre \mathbf{k} es una categoría de fusión.
- Sea G un grupo finito. La categoría Vec_G^ω de espacios vectoriales G -graduados de dimensión finita sobre \mathbf{k} con asociatividad determinada por un 3-cociclo ω es una categoría de fusión.
- Sea H un álgebra de Hopf semisimple de dimensión finita. La categoría $\text{Rep } H$ de representaciones de dimensión finita de H es una categoría de fusión.

Dimensión de Frobenius-Perron

Sea \mathcal{C} una categoría de fusión sobre \mathbf{k} .

- Denotaremos $\text{Irr}(\mathcal{C}) = \{X_0 = \mathbf{1}, X_1, \dots, X_n\}$ al conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples en \mathcal{C} .
- Reglas de fusión: $X \otimes Y \simeq \bigoplus_{Z \in \text{Irr}(\mathcal{C})} N_{X,Y}^Z Z$
($X, Y \in \text{Irr}(\mathcal{C})$) con $N_{X,Y}^Z = \dim \text{Hom}(Z, X \otimes Y) \in \mathbb{Z}^+$.
- La dimensión de Frobenius-Perron $\text{FPdim}(X) \in \mathbb{R}^+$ de $X \in \mathcal{C}$ es el mayor autovalor no-negativo de la matriz $(N_{X,Y}^Z)_{Y,Z \in \text{Irr}(\mathcal{C})}$ (matriz de multiplicación a izquierda por X c.r. a \otimes).
- La dimensión de Frobenius-Perron de \mathcal{C} es $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = \sum_{X \in \text{Irr}(\mathcal{C})} (\text{FPdim } X)^2$.

Dimensión de Frobenius-Perron

Sea \mathcal{C} una categoría de fusión sobre \mathbf{k} .

- Denotaremos $\text{Irr}(\mathcal{C}) = \{X_0 = \mathbf{1}, X_1, \dots, X_n\}$ al conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples en \mathcal{C} .
- Reglas de fusión: $X \otimes Y \simeq \bigoplus_{Z \in \text{Irr}(\mathcal{C})} N_{X,Y}^Z Z$
($X, Y \in \text{Irr}(\mathcal{C})$) con $N_{X,Y}^Z = \dim \text{Hom}(Z, X \otimes Y) \in \mathbb{Z}^+$.
- La dimensión de Frobenius-Perron $\text{FPdim}(X) \in \mathbb{R}^+$ de $X \in \mathcal{C}$ es el mayor autovalor no-negativo de la matriz $(N_{X,Y}^Z)_{Y,Z \in \text{Irr}(\mathcal{C})}$ (matriz de multiplicación a izquierda por X c.r. a \otimes).
- La dimensión de Frobenius-Perron de \mathcal{C} es $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = \sum_{X \in \text{Irr}(\mathcal{C})} (\text{FPdim } X)^2$.

Dimensión de Frobenius-Perron

Sea \mathcal{C} una categoría de fusión sobre \mathbf{k} .

- Denotaremos $\text{Irr}(\mathcal{C}) = \{X_0 = \mathbf{1}, X_1, \dots, X_n\}$ al conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples en \mathcal{C} .
- Reglas de fusión: $X \otimes Y \simeq \bigoplus_{Z \in \text{Irr}(\mathcal{C})} N_{X,Y}^Z Z$
($X, Y \in \text{Irr}(\mathcal{C})$) con $N_{X,Y}^Z = \dim \text{Hom}(Z, X \otimes Y) \in \mathbb{Z}^+$.
- La dimensión de Frobenius-Perron $\text{FPdim}(X) \in \mathbb{R}^+$ de $X \in \mathcal{C}$ es el mayor autovalor no-negativo de la matriz $(N_{X,Y}^Z)_{Y,Z \in \text{Irr}(\mathcal{C})}$ (matriz de multiplicación a izquierda por X c.r. a \otimes).
- La dimensión de Frobenius-Perron de \mathcal{C} es $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = \sum_{X \in \text{Irr}(\mathcal{C})} (\text{FPdim } X)^2$.

Dimensión de Frobenius-Perron

Sea \mathcal{C} una categoría de fusión sobre \mathbf{k} .

- Denotaremos $\text{Irr}(\mathcal{C}) = \{X_0 = \mathbf{1}, X_1, \dots, X_n\}$ al conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples en \mathcal{C} .
- Reglas de fusión: $X \otimes Y \simeq \bigoplus_{Z \in \text{Irr}(\mathcal{C})} N_{X,Y}^Z Z$
($X, Y \in \text{Irr}(\mathcal{C})$) con $N_{X,Y}^Z = \dim \text{Hom}(Z, X \otimes Y) \in \mathbb{Z}^+$.
- La dimensión de Frobenius-Perron $\text{FPdim}(X) \in \mathbb{R}^+$ de $X \in \mathcal{C}$ es el mayor autovalor no-negativo de la matriz $(N_{X,Y}^Z)_{Y,Z \in \text{Irr}(\mathcal{C})}$ (matriz de multiplicación a izquierda por X c.r. $\mathbf{a} \otimes$).
- La dimensión de Frobenius-Perron de \mathcal{C} es $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = \sum_{X \in \text{Irr}(\mathcal{C})} (\text{FPdim } X)^2$.

Dimensión de Frobenius-Perron

Sea \mathcal{C} una categoría de fusión sobre \mathbf{k} .

- Denotaremos $\text{Irr}(\mathcal{C}) = \{X_0 = \mathbf{1}, X_1, \dots, X_n\}$ al conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples en \mathcal{C} .
- Reglas de fusión: $X \otimes Y \simeq \bigoplus_{Z \in \text{Irr}(\mathcal{C})} N_{X,Y}^Z Z$
($X, Y \in \text{Irr}(\mathcal{C})$) con $N_{X,Y}^Z = \dim \text{Hom}(Z, X \otimes Y) \in \mathbb{Z}^+$.
- La dimensión de Frobenius-Perron $\text{FPdim}(X) \in \mathbb{R}^+$ de $X \in \mathcal{C}$ es el mayor autovalor no-negativo de la matriz $(N_{X,Y}^Z)_{Y,Z \in \text{Irr}(\mathcal{C})}$ (matriz de multiplicación a izquierda por X c.r. a \otimes).
- La dimensión de Frobenius-Perron de \mathcal{C} es $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = \sum_{X \in \text{Irr}(\mathcal{C})} (\text{FPdim } X)^2$.

Dimensión de Frobenius-Perron

- Una categoría de fusión \mathcal{C} es **íntegra** si $\text{FPdim}(X) \in \mathbb{Z}^+, \forall X \in \text{Irr}(\mathcal{C}) (\Rightarrow \mathcal{C} \simeq \text{Rep } H, H \text{ quasi-Hopf semisimple [ENO])}$.
- Una categoría de fusión \mathcal{C} es **débilmente íntegra** si $\text{FPdim}(\mathcal{C}) \in \mathbb{Z}$.

Dimensión de Frobenius-Perron

- Una categoría de fusión \mathcal{C} es **íntegra** si $\text{FPdim}(X) \in \mathbb{Z}^+, \forall X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$ ($\Rightarrow \mathcal{C} \simeq \text{Rep } H$, H quasi-Hopf semisimple [ENO]).
- Una categoría de fusión \mathcal{C} es **débilmente íntegra** si $\text{FPdim}(\mathcal{C}) \in \mathbb{Z}$.

Categorías de fusión punteadas

- Un objeto $X \in \mathcal{C}$ es **invertible** si y sólo si $\text{FPdim } X = 1$.
El conjunto de objetos invertible $G(\mathcal{C})$ en \mathcal{C} es un grupo c.r. a \otimes .
- Una categoría se dice **punteada** si todos sus objetos simples son invertibles. Si \mathcal{C} es punteada entonces $\mathcal{C} \cong \text{Vec}_G^\omega$.
- La subcategoría **punteada** maximal \mathcal{C}_{pt} de \mathcal{C} es la subcategoría de fusión generada por $G(\mathcal{C})$.

Categorías de fusión punteadas

- Un objeto $X \in \mathcal{C}$ es **invertible** si y sólo si $\text{FPdim } X = 1$.
El conjunto de objetos invertible $G(\mathcal{C})$ en \mathcal{C} es un grupo c.r. a \otimes .
- Una categoría se dice **punteada** si todos sus objetos simples son invertibles. Si \mathcal{C} es punteada entonces $\mathcal{C} \cong \text{Vec}_G^\omega$.
- La subcategoría **punteada** maximal \mathcal{C}_{pt} de \mathcal{C} es la subcategoría de fusión generada por $G(\mathcal{C})$.

Categorías de fusión punteadas

- Un objeto $X \in \mathcal{C}$ es **invertible** si y sólo si $\text{FPdim } X = 1$. El conjunto de objetos invertible $G(\mathcal{C})$ en \mathcal{C} es un grupo c.r. a \otimes .
- Una categoría se dice **punteada** si todos sus objetos simples son invertibles. Si \mathcal{C} es punteada entonces $\mathcal{C} \cong \text{Vec}_G^\omega$.
- La subcategoría **punteada** maximal \mathcal{C}_{pt} de \mathcal{C} es la subcategoría de fusión generada por $G(\mathcal{C})$.

Categorías de fusión punteadas

- Un objeto $X \in \mathcal{C}$ es **invertible** si y sólo si $\text{FPdim } X = 1$.
El conjunto de objetos invertible $G(\mathcal{C})$ en \mathcal{C} es un grupo c.r. a \otimes .
- Una categoría se dice **punteada** si todos sus objetos simples son invertibles. Si \mathcal{C} es punteada entonces $\mathcal{C} \cong \text{Vec}_G^\omega$.
- La subcategoría **punteada** maximal \mathcal{C}_{pt} de \mathcal{C} es la subcategoría de fusión generada por $G(\mathcal{C})$.

Categorías de fusión trenzadas

Una categoría de fusión \mathcal{C} es **trenzada** si está munida de isomorfismos naturales $\sigma_{U,V} : U \otimes V \rightarrow V \otimes U$ (**trenza**) que satisfacen los axiomas de hexágono, i.e. el siguiente diagrama (y otro análogo) conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} (U \otimes V) \otimes W & \xrightarrow{a_{U,V,W}} & U \otimes (V \otimes W) & \xrightarrow{\sigma_{U,V \otimes W}} & (V \otimes W) \otimes U \\ \sigma_{U,V} \otimes \text{id}_W \downarrow & & & & \downarrow a_{V,W,U} \\ (V \otimes U) \otimes W & \xrightarrow{a_{V,U,W}} & V \otimes (U \otimes W) & \xrightarrow{\text{id}_V \otimes \sigma_{U,W}} & V \otimes (W \otimes U). \end{array}$$

Categorías de fusión trenzadas

Una categoría de fusión \mathcal{C} es **trenzada** si está munida de isomorfismos naturales $\sigma_{U,V} : U \otimes V \rightarrow V \otimes U$ (trenza) que satisfacen los axiomas de hexágono, i.e. el siguiente diagrama (y otro análogo) conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} (U \otimes V) \otimes W & \xrightarrow{a_{U,V,W}} & U \otimes (V \otimes W) & \xrightarrow{\sigma_{U,V \otimes W}} & (V \otimes W) \otimes U \\ \sigma_{U,V} \otimes \text{id}_W \downarrow & & & & \downarrow a_{V,W,U} \\ (V \otimes U) \otimes W & \xrightarrow{a_{V,U,W}} & V \otimes (U \otimes W) & \xrightarrow{\text{id}_V \otimes \sigma_{U,W}} & V \otimes (W \otimes U). \end{array}$$

Categorías Modulares

Sea \mathcal{C} una categoría de fusión trenzada (con trenza σ) sobre \mathbf{k} .

- $X, Y \in \mathcal{C}$ se **centralizan mutuamente** si $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}$.
- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. El **centralizador** \mathcal{D}' de \mathcal{D} es la siguiente subcategoría de fusión de \mathcal{C} :

$$\mathcal{D}' = \{X \in \mathcal{C} : \sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}, \forall Y \in \mathcal{D}\}.$$

- El **centro de Müger** (o centro simétrico) $Z_2(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} es el centralizador de \mathcal{C} : $Z_2(\mathcal{C}) \doteq \mathcal{C}'$.

Definición

La categoría \mathcal{C} es *no-degenerada* si su centro de Müger es *trivial*. Una categoría modular es una categoría premodular no-degenerada.

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra, entonces $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C})$, $\forall X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$.

Categorías Modulares

Sea \mathcal{C} una categoría de fusión trenzada (con trenza σ) sobre \mathbf{k} .

- $X, Y \in \mathcal{C}$ se **centralizan mutuamente** si $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}$.
- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. El **centralizador** \mathcal{D}' de \mathcal{D} es la siguiente subcategoría de fusión de \mathcal{C} :

$$\mathcal{D}' = \{X \in \mathcal{C} : \sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}, \forall Y \in \mathcal{D}\}.$$

- El **centro de Müger** (o centro simétrico) $Z_2(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} es el centralizador de \mathcal{C} : $Z_2(\mathcal{C}) \doteq \mathcal{C}'$.

Definición

*La categoría \mathcal{C} es **no-degenerada** si su centro de Müger es **trivial**. Una categoría modular es una categoría premodular no-degenerada.*

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra, entonces $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C})$, $\forall X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$.

Categorías Modulares

Sea \mathcal{C} una categoría de fusión trenzada (con trenza σ) sobre \mathbf{k} .

- $X, Y \in \mathcal{C}$ se **centralizan mutuamente** si $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}$.
- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. El **centralizador** \mathcal{D}' de \mathcal{D} es la siguiente subcategoría de fusión de \mathcal{C} :

$$\mathcal{D}' = \{X \in \mathcal{C} : \sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}, \forall Y \in \mathcal{D}\}.$$

- El **centro de Müger** (o centro simétrico) $Z_2(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} es el centralizador de \mathcal{C} : $Z_2(\mathcal{C}) \doteq \mathcal{C}'$.

Definición

*La categoría \mathcal{C} es **no-degenerada** si su centro de Müger es **trivial**. Una categoría modular es una categoría premodular no-degenerada.*

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra, entonces $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C})$, $\forall X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$.

Categorías Modulares

Sea \mathcal{C} una categoría de fusión trenzada (con trenza σ) sobre \mathbf{k} .

- $X, Y \in \mathcal{C}$ se **centralizan mutuamente** si $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}$.
- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. El **centralizador** \mathcal{D}' de \mathcal{D} es la siguiente subcategoría de fusión de \mathcal{C} :

$$\mathcal{D}' = \{X \in \mathcal{C} : \sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}, \forall Y \in \mathcal{D}\}.$$

- El **centro de Müger** (o centro simétrico) $Z_2(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} es el centralizador de \mathcal{C} : $Z_2(\mathcal{C}) \doteq \mathcal{C}'$.

Definición

La categoría \mathcal{C} es no-degenerada si su centro de Müger es trivial. Una categoría modular es una categoría premodular no-degenerada.

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra, entonces $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C})$, $\forall X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$.

Categorías Modulares

Sea \mathcal{C} una categoría de fusión trenzada (con trenza σ) sobre \mathbf{k} .

- $X, Y \in \mathcal{C}$ se **centralizan mutuamente** si $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}$.
- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. El **centralizador** \mathcal{D}' de \mathcal{D} es la siguiente subcategoría de fusión de \mathcal{C} :

$$\mathcal{D}' = \{X \in \mathcal{C} : \sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}, \forall Y \in \mathcal{D}\}.$$

- El **centro de Müger** (o centro simétrico) $Z_2(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} es el centralizador de \mathcal{C} : $Z_2(\mathcal{C}) \doteq \mathcal{C}'$.

Definición

La categoría \mathcal{C} es **no-degenerada** si su centro de Müger es **trivial**. Una categoría **modular** es una categoría premodular no-degenerada.

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra, entonces $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C})$, $\forall X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$.

Categorías Modulares

Sea \mathcal{C} una categoría de fusión trenzada (con trenza σ) sobre \mathbf{k} .

- $X, Y \in \mathcal{C}$ se **centralizan mutuamente** si $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}$.
- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. El **centralizador** \mathcal{D}' de \mathcal{D} es la siguiente subcategoría de fusión de \mathcal{C} :

$$\mathcal{D}' = \{X \in \mathcal{C} : \sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}, \forall Y \in \mathcal{D}\}.$$

- El **centro de Müger** (o centro simétrico) $Z_2(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} es el centralizador de \mathcal{C} : $Z_2(\mathcal{C}) \doteq \mathcal{C}'$.

Definición

La categoría \mathcal{C} es **no-degenerada** si su centro de Müger es **trivial**. Una categoría **modular** es una categoría premodular no-degenerada.

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra, entonces $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C})$, $\forall X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$.

Categorías de tipo grupo

Una categoría de fusión de **tipo grupo** es una categoría de fusión equivalente a la categoría $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ de $k_\alpha F$ -bimódulos en Vec_G^ω , donde:

- G es un grupo finito,
- ω es un 3-cociclo en G ,
- $F \subseteq G$ es un subgrupo, y
- $\alpha \in \mathcal{C}^2(F, k^\times)$ es una 2-cocadena de F t.q. $\omega|_F = d\alpha$.

Equivalentemente, \mathcal{C} es una categoría de fusión de tipo grupo si es **Morita equivalente** a una categoría de fusión punteada Vec_G^ω .

Categorías de tipo grupo

Una categoría de fusión de **tipo grupo** es una categoría de fusión equivalente a la categoría $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ de $k_\alpha F$ -bimódulos en Vec_G^ω , donde:

- G es un grupo finito,
- ω es un 3-cociclo en G ,
- $F \subseteq G$ es un subgrupo, y
- $\alpha \in \mathcal{C}^2(F, k^\times)$ es una 2-cocadena de F t.q. $\omega|_F = d\alpha$.

Equivalentemente, \mathcal{C} es una categoría de fusión de tipo grupo si es **Morita equivalente** a una categoría de fusión punteada Vec_G^ω .

Categorías de tipo grupo

Una categoría de fusión de **tipo grupo** es una categoría de fusión equivalente a la categoría $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ de $k_\alpha F$ -bimódulos en Vec_G^ω , donde:

- G es un grupo finito,
- ω es un 3-cociclo en G ,
- $F \subseteq G$ es un subgrupo, y
- $\alpha \in \mathcal{C}^2(F, k^\times)$ es una 2-cocadena de F t.q. $\omega|_F = d\alpha$.

Equivalentemente, \mathcal{C} es una categoría de fusión de tipo grupo si es **Morita equivalente** a una categoría de fusión punteada Vec_G^ω .

Sea \mathcal{C} una categoría modular íntegra.

La categoría \mathcal{C} es de tipo grupo cuando $\text{FPdim}(\mathcal{C})$ toma alguno de los siguientes valores:

- p^n [DGNO],
- pq [EGO],
- pqr [ENO2],
- pq^2 [NR], o
- pq^3 [NR],

donde p , q y r son primos distintos.

Sea \mathcal{C} una categoría modular íntegra.

La categoría \mathcal{C} es de **tipo grupo** cuando $\text{FPdim}(\mathcal{C})$ toma alguno de los siguientes valores:

- p^n [DGNO],
- pq [EGO],
- pqr [ENO2],
- pq^2 [NR], o
- pq^3 [NR],

donde p , q y r son primos distintos.

Sea \mathcal{C} una categoría modular íntegra.

La categoría \mathcal{C} es de **tipo grupo** cuando $\text{FPdim}(\mathcal{C})$ toma alguno de los siguientes valores:

- p^n [DGNO],
- pq [EGO],
- pqr [ENO2],
- pq^2 [NR], o
- pq^3 [NR],

donde p , q y r son primos distintos.

$$FPdim(\mathcal{C}) = pq^4 \text{ o } p^2q^2$$

Teorema (BGHKNNPR)

Sean \mathcal{C} una categoría de fusión modular íntegra y p y q primos distintos. Entonces:

- Si $FPdim(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de tipo grupo.
- Si $FPdim(\mathcal{C}) = p^2q^2$ es impar entonces \mathcal{C} es de tipo grupo.
- Si \mathcal{C} **no** es de tipo grupo y $FPdim(\mathcal{C}) = 4q^2$ entonces \mathcal{C} es conocida: es equivalente a una categoría proveniente del centro de una Tambara-Yamagami o de grupos cuánticos.

$$FPdim(\mathcal{C}) = pq^4 \text{ o } p^2q^2$$

Teorema (BGHKNNPR)

Sean \mathcal{C} una categoría de fusión modular íntegra y p y q primos distintos. Entonces:

- Si $FPdim(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de *tipo grupo*.
- Si $FPdim(\mathcal{C}) = p^2q^2$ es impar entonces \mathcal{C} es de *tipo grupo*.
- Si \mathcal{C} **no** es de *tipo grupo* y $FPdim(\mathcal{C}) = 4q^2$ entonces \mathcal{C} es conocida: es equivalente a una categoría proveniente del centro de una Tambara-Yamagami o de grupos cuánticos.

$$FPdim(\mathcal{C}) = pq^4 \text{ o } p^2q^2$$

Teorema (BGHKNNPR)

Sean \mathcal{C} una categoría de fusión modular íntegra y p y q primos distintos. Entonces:

- Si $FPdim(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de *tipo grupo*.
- Si $FPdim(\mathcal{C}) = p^2q^2$ es impar entonces \mathcal{C} es de *tipo grupo*.
- Si \mathcal{C} *no* es de tipo grupo y $FPdim(\mathcal{C}) = 4q^2$ entonces \mathcal{C} es conocida: es equivalente a una categoría proveniente del centro de una Tambara-Yamagami o de grupos cuánticos.

$$FPdim(\mathcal{C}) = pq^4 \text{ o } p^2q^2$$

Teorema (BGHKNNPR)

Sean \mathcal{C} una categoría de fusión modular íntegra y p y q primos distintos. Entonces:

- Si $FPdim(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de *tipo grupo*.
- Si $FPdim(\mathcal{C}) = p^2q^2$ es impar entonces \mathcal{C} es de *tipo grupo*.
- Si \mathcal{C} **no** es de tipo grupo y $FPdim(\mathcal{C}) = 4q^2$ entonces \mathcal{C} es conocida: es equivalente a una categoría proveniente del centro de una Tambara-Yamagami o de grupos cuánticos.

Una **G-graduación** de una categoría de fusión \mathcal{C} es una descomposición $\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$ t.q.:

- cada \mathcal{C}_g es una subcategoría abeliana plena, y
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ manda $\mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h$ en \mathcal{C}_{gh} .

La graduación es **fiel** si $\mathcal{C}_g \neq 0, \forall g \in G$. En este caso:
 $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = |G| \text{FPdim}(\mathcal{C}_e)$ y $\text{FPdim}(\mathcal{C}_e) = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g), \forall g \in G$.

Una **G-graduación** de una categoría de fusión \mathcal{C} es una descomposición $\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$ t.q.:

- cada \mathcal{C}_g es una subcategoría abeliana plena, y
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ manda $\mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h$ en \mathcal{C}_{gh} .

La graduación es **fiel** si $\mathcal{C}_g \neq 0, \forall g \in G$. En este caso:
 $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = |G| \text{FPdim}(\mathcal{C}_e)$ y $\text{FPdim}(\mathcal{C}_e) = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g), \forall g \in G$.

Una **G-graduación** de una categoría de fusión \mathcal{C} es una descomposición $\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$ t.q.:

- cada \mathcal{C}_g es una subcategoría abeliana plena, y
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ manda $\mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h$ en \mathcal{C}_{gh} .

La graduación es **fiel** si $\mathcal{C}_g \neq 0, \forall g \in G$. En este caso:
 $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = |G| \text{FPdim}(\mathcal{C}_e)$ y $\text{FPdim}(\mathcal{C}_e) = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g), \forall g \in G$.

Una **G-graduación** de una categoría de fusión \mathcal{C} es una descomposición $\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$ t.q.:

- cada \mathcal{C}_g es una subcategoría abeliana plena, y
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ manda $\mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h$ en \mathcal{C}_{gh} .

La graduación es **fiel** si $\mathcal{C}_g \neq 0, \forall g \in G$. En este caso:
 $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = |G| \text{FPdim}(\mathcal{C}_e)$ y $\text{FPdim}(\mathcal{C}_e) = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g), \forall g \in G$.

Una **G-graduación** de una categoría de fusión \mathcal{C} es una descomposición $\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$ t.q.:

- cada \mathcal{C}_g es una subcategoría abeliana plena, y
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ manda $\mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h$ en \mathcal{C}_{gh} .

La graduación es **fiel** si $\mathcal{C}_g \neq 0, \forall g \in G$. En este caso:
 $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = |G| \text{FPdim}(\mathcal{C}_e)$ y $\text{FPdim}(\mathcal{C}_e) = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g), \forall g \in G$.

Graduación universal de \mathcal{C}

La subcategoría **adjunta** \mathcal{C}_{ad} de \mathcal{C} es la subcategoría de fusión generada por $X \otimes X^*$, con X simple en \mathcal{C} .

Gelaki y Nikshych mostraron que para toda categoría de fusión \mathcal{C} existe una graduación fiel canónica:

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in U(\mathcal{C})} \mathcal{C}_g,$$

llamada la *graduación universal* de \mathcal{C} y satisface que $\mathcal{C}_e = \mathcal{C}_{\text{ad}}$.

Teorema (GN)

Sea \mathcal{C} una categoría *modular*. Entonces su grupo de graduación universal $U(\mathcal{C})$ es isomorfo al grupo de caracteres de $G(\mathcal{C})$, i.e., $U(\mathcal{C}) \simeq \widehat{G(\mathcal{C})}$.

Graduación universal de \mathcal{C}

La subcategoría **adjunta** \mathcal{C}_{ad} de \mathcal{C} es la subcategoría de fusión generada por $X \otimes X^*$, con X simple en \mathcal{C} .

Gelaki y Nikshych mostraron que para toda categoría de fusión \mathcal{C} existe una graduación fiel canónica:

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in U(\mathcal{C})} \mathcal{C}_g,$$

llamada la *graduación universal* de \mathcal{C} y satisface que $\mathcal{C}_e = \mathcal{C}_{\text{ad}}$.

Teorema (GN)

Sea \mathcal{C} una categoría *modular*. Entonces su grupo de graduación universal $U(\mathcal{C})$ es isomorfo al grupo de caracteres de $G(\mathcal{C})$, i.e., $U(\mathcal{C}) \simeq \widehat{G(\mathcal{C})}$.

Graduación universal de \mathcal{C}

La subcategoría **adjunta** \mathcal{C}_{ad} de \mathcal{C} es la subcategoría de fusión generada por $X \otimes X^*$, con X simple en \mathcal{C} .

Gelaki y Nikshych mostraron que para toda categoría de fusión \mathcal{C} existe una graduación fiel canónica:

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in U(\mathcal{C})} \mathcal{C}_g,$$

llamada la *graduación universal* de \mathcal{C} y satisface que $\mathcal{C}_e = \mathcal{C}_{\text{ad}}$.

Teorema (GN)

Sea \mathcal{C} una categoría modular. Entonces su grupo de graduación universal $U(\mathcal{C})$ es isomorfo al grupo de caracteres de $G(\mathcal{C})$, i.e., $U(\mathcal{C}) \simeq \widehat{G(\mathcal{C})}$.

Graduación universal de \mathcal{C}

La subcategoría **adjunta** \mathcal{C}_{ad} de \mathcal{C} es la subcategoría de fusión generada por $X \otimes X^*$, con X simple en \mathcal{C} .

Gelaki y Nikshych mostraron que para toda categoría de fusión \mathcal{C} existe una graduación fiel canónica:

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in U(\mathcal{C})} \mathcal{C}_g,$$

llamada la *graduación universal* de \mathcal{C} y satisface que $\mathcal{C}_e = \mathcal{C}_{\text{ad}}$.

Teorema (GN)

Sea \mathcal{C} una categoría *modular*. Entonces su grupo de graduación universal $U(\mathcal{C})$ es isomorfo al grupo de caracteres de $G(\mathcal{C})$, i.e., $U(\mathcal{C}) \simeq \widehat{G(\mathcal{C})}$.

Algunas ideas de la prueba

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q \text{ o } q^2$.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes \mathcal{C}_g y cada una tiene dimensión pq . Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_gq^2 + c_gq^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3q$. **Absurdo.**

Algunas ideas de la prueba

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q \text{ o } q^2$.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes \mathcal{C}_g y cada una tiene dimensión pq . Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_gq^2 + c_gq^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3q$. **Absurdo.**

Algunas ideas de la prueba

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q \text{ o } q^2$.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes \mathcal{C}_g y cada una tiene dimensión pq . Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_gq^2 + c_gq^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3q$. **Absurdo.**

Algunas ideas de la prueba

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q \text{ o } q^2$.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes \mathcal{C}_g y cada una tiene dimensión pq . Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_gq^2 + c_gq^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3q$. **Absurdo.**

Algunas ideas de la prueba

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q \text{ o } q^2$.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes \mathcal{C}_g y cada una tiene dimensión pq . Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_gq^2 + c_gq^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3q$. **Absurdo.**

Algunas ideas de la prueba

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q \text{ o } q^2$.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes \mathcal{C}_g y cada una tiene dimensión pq . Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_gq^2 + c_gq^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3q$. **Absurdo.**

Algunas ideas de la prueba

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q \text{ o } q^2$.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes \mathcal{C}_g y cada una tiene dimensión pq . Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_gq^2 + c_gq^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3q$. **Absurdo.**

Algunas ideas de la prueba

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q \text{ o } q^2$.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- **Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$** : la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes \mathcal{C}_g y cada una tiene dimensión pq . Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_gq^2 + c_gq^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3q$. **Absurdo.**

Algunas ideas de la prueba

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q \text{ o } q^2$.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes \mathcal{C}_g y cada una tiene dimensión pq . Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_gq^2 + c_gq^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3q$. **Absurdo.**

Algunas ideas de la prueba

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q \text{ o } q^2$.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- **Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$** : la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes \mathcal{C}_g y cada una tiene dimensión pq . Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_gq^2 + c_gq^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q$, $\forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3q$. **Absurdo.**

Algunas ideas de la prueba

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q \text{ o } q^2$.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- **Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$** : la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes \mathcal{C}_g y cada una tiene dimensión pq . Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_gq^2 + c_gq^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3q$. **Absurdo.**

Algunas ideas de la prueba

Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q \text{ o } q^2$.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes \mathcal{C}_g y cada una tiene dimensión pq . Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_gq^2 + c_gq^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3q$. **Absurdo.**





Algunas ideas de la prueba




Si \mathcal{C} es una categoría modular íntegra con $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4$ entonces \mathcal{C} es de tipo grupo.

Idea de la prueba:

- Sea $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$. Como $\text{FPdim}(X)^2$ divide a $\text{FPdim}(\mathcal{C}) = pq^4 \Rightarrow \text{FPdim}(X) = 1, q \text{ o } q^2$.
- Entonces $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C}) = a + bq^2 + cq^4$. Luego $q^2 | a = \text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$.
- Además, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}})$ divide a $pq^4 = \text{FPdim}(\mathcal{C})$. Así, $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) \in \{q^2, q^3, q^4, pq^2, pq^3, pq^4\}$.
- Caso $\text{FPdim}(\mathcal{C}_{\text{pt}}) = q^3$: la graduación universal por $U(\mathcal{C})$ tiene q^3 componentes \mathcal{C}_g y cada una tiene dimensión pq . Luego, $pq = \text{FPdim}(\mathcal{C}_g) = a_g + b_gq^2 + c_gq^4$. Entonces $a_g \neq 0, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Como q divide a $a_g \Rightarrow a_g \geq q, \forall g \in U(\mathcal{C})$. Así, $q^3 = a = \sum_{g \in U(\mathcal{C})} a_g \geq q^3q$. **Absurdo.**

References I

-  V. Drinfeld, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik.
Group-theoretical properties of nilpotent modular categories.
Preprint arXiv:0704.0195, 2007.
-  P. Etingof, S. Gelaki, V. Ostrik.
Classification of fusion categories of dimension pq .
Int. Math. Res. Not., **57**:3041–3056, 2004.
-  P. Etingof, D. Nikshych, V. Ostrik.
On fusion categories.
Annals of Math., **162**:581–642, 2005.
-  P. Etingof, D. Nikshych, V. Ostrik.
Weakly group-theoretical and solvable fusion categories.
Adv. Math., **226**:176–205, 2011.

-  S. Gelaki, D. Nikshych.
Nilpotent fusion categories.
Adv. Math., **217**:1053-1071, 2008.
-  S. Gelaki, D. Naidu, D. Nikshych.
Centers of graded fusion categories.
Algebra Number Theory, **3**: 959-990, 2009.
-  D. Naidu, E. Rowell.
A finiteness property for braided fusion categories.
Algebr. Represent. Theory, **14**, No. 5: 837–855, 2011.



P. Bruillard, C. Galindo, S.-M. Hong, Y. Kashina, D. Naidu, S. Natale, J. Plavnik, E. Rowell.

Classification of integral modular categories of Frobenius-Perron dimension pq^4 and p^2q^2 .

To appear in *Can. Math. Bull.*. Preprint arXiv:1303.4748, 2013.