Formas modulares y álgebras de Lie

Colaboración con Jethro Van Ekeren

Agosto 2014, La Falda

Leonard Euler (1738). Longitud de la elipse:

$$\frac{\pi b}{2}\left(1+\frac{1\cdot 1\cdot n}{2\cdot 2}+\frac{1\cdot 3\cdot n^2}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}+\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot n^3}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}+\dots\right)$$

Giulio Fagnano (1718). Estudio sobre la Lemniscata

$$ds=\frac{dt}{\sqrt{b^2-t^4}}.$$

Friedrich Gauss (1800): El polígono regular de 17 lados se puede construir con regla y compás.

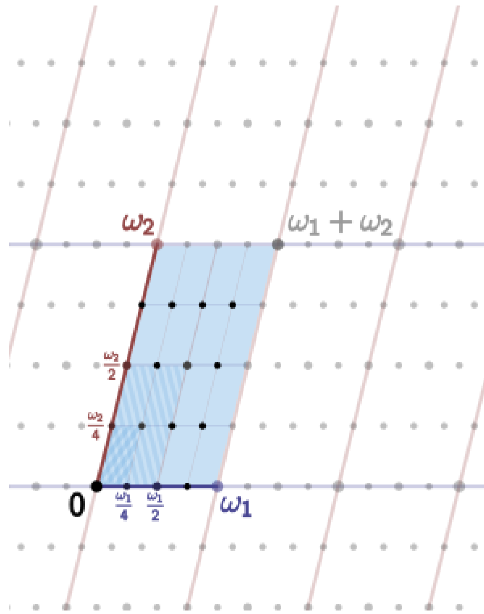
Adrien Marie Legendre (1824–1830): Toda integral elíptica se puede transformar en una de tres formas

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}, \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 t}\,dt, \int \frac{dt}{(1-n \sin^2 t)\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}.$$

Niels Henrik Abel (1824): Si uno de los ejes de la elipse es *imaginario* entonces su longitud puede escribirse como

$$\alpha = \int \frac{dx}{\sqrt{1-c^2x^2}\sqrt{1+e^2x^2}},$$

Funciones elípticas tienen un reticulado de períodos



Gauss (1800): Estudio de reticulados y formas cuadráticas enteras

$$f = am^2 + 2bmn + cn^2, \qquad ac - b^2 = D > 0,$$
$$a, b, c \in \mathbb{R}_+, \qquad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Gauss (1800) $SL(2,\mathbb{Z})$ actúa en el conjunto de reticulados. Cuantas clases de equivalencia hay con un discriminante fijo?

Abel (1824) La Lemniscata puede ser dividida en n-partes iguales con regla y compás!

Jacobi (1828) sobre Abel: *"Elle est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes propres travaux"*

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1885) describió el anillo de funciones meromorfas con períodos en el reticulado $\Gamma \subset \mathbb{C}$.

$$\wp(t) := \frac{1}{t^2} + \sum_{0 \neq \gamma \in \Gamma} \left(\frac{1}{(t-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right).$$

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Toda otra función con períodos en Γ es una función racional de $\wp$ y $\wp'$.

$SL(2,\mathbb{Z})$ actúa en $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $SL(2,\mathbb{Z})$ actúa en funciones en $\mathbb{H}$ por

$$\left[\varphi \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right](\tau) = (c\tau + d)^{-k} \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau\right)$$

Una forma modular de peso k es una función holomorfa en $\mathbb{H}$ invariante por esa acción. Pedimos además que tenga una serie de Fourier

$$\varphi(\tau) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n, \qquad q = e^{2\pi i \tau}.$$

$\mathbb{Z}^2 \rtimes SL(2,\mathbb{Z})$ actúa en $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$. Las *Formas de Jacobi* de peso k e índice l son las invariantes por esta acción.

$$\varphi\left(\alpha + m\tau + n, \tau\right) = e^{-2\pi i l (m^2\tau + 2m\alpha)}\varphi(\alpha,\tau), \qquad (m,n) \in \mathbb{Z}^2$$
$$\varphi\left(\frac{\alpha}{c\tau+d}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{2\pi i l \frac{c\alpha^2}{c\tau+d}}\varphi\left(\alpha,\tau\right), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$$

Formas modulares son funciones en el espacio de moduli (terso?) de curvas elípticas $M_{1,1} = \mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z})$. Formas de Jacobi son "funciones en la curva elíptica universal" (sic) $\mathbb{C} \times \mathbb{H}/\mathbb{Z}^2 \rtimes SL(2,\mathbb{Z})$.

Carl Gustav Jacob Jacobi (1828)

$$\theta(\tau,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k q^{\frac{(k+1/2)^2}{2}} y^{k+1/2}, \quad q = e^{2\pi i\tau}, \quad y = e^{2\pi i\alpha}.$$

Es una forma de Jacobi de peso 1/2 e índice 1/2. La serie converge rápidamente.

$$\prod_{n\geq 1} (1-q^n)(1-yq^n)(1-y^{-1}q^{n-1}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-y)^k q^{k^2/2+k/2}.$$

$$\widehat{G} = \left\{ f : G \to S^1 \right\} \rightsquigarrow G((t))$$

$$\text{Diff } S^1 \rightsquigarrow \text{Aut}\, \mathbb{C}((t))$$

$S^1 = U(1)$ actúa naturalmente en estos grupos (y en sus representaciones).

$$V = \bigoplus_{n \geq 0} V_n, \qquad \chi_V(q) = \sum_{n \geq 0} q^n \dim V_n.$$

Virasoro:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3 - m}{12}\delta_{m,-n}C.$$

$$m, n \in \mathbb{Z}.$$

Kac-Moody afin $\widehat{\mathfrak{g}}$

$$[a_m, b_n] = [a,b]_{m+n} + m(a,b)\delta_{m,-n}K.$$

$$a, b \in \mathfrak{g}, \qquad m, n \in \mathbb{Z}, \qquad (\cdot,\cdot) \in (S^2\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}.$$

$S^1 \rightsquigarrow L_0 = -t\frac{\partial}{\partial t} \in \mathrm{Vir}$, L_0 actúa en $\widehat{\mathfrak{g}}$ por $a_n \mapsto -na_{n-1}$. $K = k\mathrm{Id}_V$, $C = c\mathrm{Id}_V$ son el nivel y la carga central de la representación V.

Igor Frenkel (1980), Victor Kac - Dale Peterson (1984): $\mathfrak{g}$ simple de dimensión finita. $k \in \mathbb{N}$.

1. Existen finitos módulos V_i irreducibles de energía positiva y nivel k.

2. $\chi_V(\tau)$ converge a una función holomorfa para cada $V = V_i$.

3. El espacio lineal generado por $\left\{q^{c_V}\chi_{V_i}(q)\right\}$ es invariante por $SL(2, \mathbb{Z})$

Boris Feigin et. al. (1978–1986) Lo mismo es cierto para Virasoro con ciertos valores racionales de c. El factor de corrección es $q^{-c/24}$.

George Neville Watson (1928) Probó una identidad con un producto quintuple, generalizando la de Jacobi.

Ian Grant MacDonald (1972) Para cada sistema de raíces afín, existe una identidad producto que generaliza a Jacobi para $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ y Watson para $\widehat{\mathfrak{sl}}_3$

Kac (1974): las identidades de Mac Donald son las formulas del denominador para las representaciones irreducibles de las álgebras afines correspondientes.

Yongchang Zhu (1990): Los caracteres $\chi_V(\tau)$ son bloques conformes del álgebra de Virasoro, Kac-Moody, etc. en la curva elíptica parametrizada por $\tau \in \mathbb{H}$.

Yongchang Zhu (1990): Sea A una álgebra de vértices tal que $A/A\partial A$ es de dimensión finita. Entonces vale:

1. A tiene un número finito de módulos irreducibles.

2. Los caracteres $\chi_i(q)$ de esos módulos son convergentes a funciones holomorfas

3. El espacio generado por $q^{-c/24}\chi_i(q)$ es invariante por $SL(2,\mathbb{Z})$.

A álgebra de vértices (representación de Virasoro). $X/\mathbb{C}$ curva suave $\rightsquigarrow \mathcal{A}, \nabla$ fibrado con conexión plana en X.

$x \in X \rightsquigarrow C(X, x, A) \in Vect_{\mathbb{C}}$.

$(X, x) \in \mathcal{M}_{g,1} \rightsquigarrow \mathcal{C}, \nabla_C$ fibrado con conexión plana en $\mathcal{M}_{g,1}$

$g = 1 \rightsquigarrow \dim C(X, x) =$ número de módulos irreducibles V_i de A.

$\chi_i(q) \in \Gamma_\nabla(M_{1,1}, \mathcal{C})$ para todo i.

En particular $\chi_i(q)$ satisface una ecuación diferencial y por eso converge.

El espacio generado por $\chi_i(q)$ es invariante modular pues son las secciones planas de un fibrado en $\mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$.

$$\mathrm{Diff}\, S^{1|1} = \mathrm{Aut}\, \mathbb{C}((t))[\zeta].$$

Álgebra de Lie superconforme N=2

$$L_n = -t^{n+1}\partial_t - (n+1)t^n\zeta\partial_\zeta, \quad J_n = -t^n\zeta\partial_\zeta,$$
$$Q_n = -t^{n+1}\partial_\zeta, \quad H_n = t^n\zeta\partial_t.$$

Su extensión central

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n},$$
$$[L_m, J_n] = -nJ_{m+n} + \frac{(m^2+m)c}{6}\delta_{m,-n},\ [L_m, H_n] = -nH_{m+n}$$
$$[L_m, Q_n] = (m-n)Q_{m+n},\ [J_m, J_n] = \frac{c}{3}m\delta_{m,-n},$$
$$[J_m, Q_n] = Q_{m+n},\ [J_m, H_n] = -H_{m+n},$$
$$[H_m, Q_n] = L_{m+n} - mJ_{m+n} + \frac{(m^2-m)c}{6}\delta_{m,-n}.$$