ESTRUCTURAS DE HODGE

ELENA 2014

Temas:

Estructuras de Hodge

Grupos de Mumford-Tate

Conjetura de Hodge

Comología automorfa

Variación de EH

Clase I: panorámica

Estructura de Hodge de peso $k \geq 0$ pura racional: espacio vectorial $H_{\mathbb{Q}}$ y descomposición

$$\mathbb{C} \otimes H_{\mathbb{Q}} = H^{k,0} \oplus H^{k-1,1} \oplus \ldots \oplus H^{1,k-1} \oplus H^{0,k}$$

s.t.

$$H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$$

conj. relativa a $H_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes H_{\mathbb{Q}}$. EH reales y enteras.

Estructura de Hodge de peso $k \geq 0$ pura racional: espacio vectorial $H_{\mathbb{Q}}$ y descomposición

$$\mathbb{C} \otimes H_{\mathbb{Q}} = H^{k,0} \oplus H^{k-1,1} \oplus \ldots \oplus H^{1,k-1} \oplus H^{0,k}$$

s.t.

$$H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$$

conj. relativa a $H_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes H_{\mathbb{Q}}$. EH reales y enteras.

Ejemplo motivante: para $V \subset \mathbb{C}P^N$ algebraica no-singular,

$$H^k_{dR}(V, \mathbb{C}) = H^{k,0}(V) \oplus H^{k-1,1}(V) \oplus \ldots \oplus H^{0,k}(V)$$

$H^{p,q}(V) =$ clases de De Rham representables por formas de tipo (p, q): localmente,

$$\sum_{|I|=p, |J|=q} f_{IJ}\ dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

Estructura de Hodge de peso $k \geq 0$ pura racional: espacio vectorial $H_{\mathbb{Q}}$ y descomposición

$$\mathbb{C} \otimes H_{\mathbb{Q}} = H^{k,0} \oplus H^{k-1,1} \oplus \ldots \oplus H^{1,k-1} \oplus H^{0,k}$$

s.t.

$$H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$$

conj. relativa a $H_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes H_{\mathbb{Q}}$. EH reales y enteras.

Ejemplo motivante: para $V \subset \mathbb{C}P^N$ algebraica no-singular,

$$H^k_{dR}(V, \mathbb{C}) = H^{k,0}(V) \oplus H^{k-1,1}(V) \oplus \ldots \oplus H^{0,k}(V)$$

$H^{p,q}(V) =$ clases de De Rham representables por formas de tipo (p,q): localmente,

$$\sum_{|I|=p, |J|=q} f_{IJ}\ dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

Teoría subsiguiente: generalización de la teoría de integrales algebraicas de Abel-Riemann a varias variables

Significado geométrico: mayormente conjetural.
Por ejemplo, ya que $H^{p,p}(V)$ está definido sobre $\mathbb{R}$, qué es

$$H^{p,p}(V) \cap H^{2p}(V, \mathbb{Z})?$$

Clase de una subvariedad $j : S \hookrightarrow V$: clase de De Rham $[\alpha]$ de V t. q. $\forall \beta$

$$\int_V \alpha \wedge \beta = \int_S j^*(\beta).$$

Para S algebraica, $cl(S) \in H^{p,p}(V) \cap H^{2p}(V, \mathbb{Z})$.

Significado geométrico: mayormente conjetural.
Por ejemplo, ya que $H^{p,p}(V)$ está definido sobre $\mathbb{R}$, qué es

$$H^{p,p}(V) \cap H^{2p}(V, \mathbb{Z})?$$

Clase de una subvariedad $j : S \hookrightarrow V$: clase de De Rham $[\alpha]$ de V t. q. $\forall \beta$

$$\int_V \alpha \wedge \beta = \int_S j^*(\beta).$$

Para S algebraica, $cl(S) \in H^{p,p}(V) \cap H^{2p}(V, \mathbb{Z})$.
Conjetura original de Hodge: vale la recíproca.

Significado geométrico: mayormente conjetural.
Por ejemplo, ya que $H^{p,p}(V)$ está definido sobre $\mathbb{R}$, qué es

$$H^{p,p}(V) \cap H^{2p}(V, \mathbb{Z})?$$

Clase de una subvariedad $j : S \hookrightarrow V$: clase de De Rham $[\alpha]$ de V t. q. $\forall \beta$

$$\int_V \alpha \wedge \beta = \int_S j^*(\beta).$$

Para S algebraica, $cl(S) \in H^{p,p}(V) \cap H^{2p}(V, \mathbb{Z})$.
Conjetura original de Hodge: vale la recíproca.
Es falsa (Atiyah-Hirzebruch). Enunciado actual:

Significado geométrico: mayormente conjetural.
Por ejemplo, ya que $H^{p,p}(V)$ está definido sobre $\mathbb{R}$, qué es

$$H^{p,p}(V) \cap H^{2p}(V,\mathbb{Z})?$$

Clase de una subvariedad $j : S \hookrightarrow V$: clase de De Rham $[\alpha]$ de V t. q. $\forall \beta$

$$\int_V \alpha \wedge \beta = \int_S j^*(\beta).$$

Para S algebraica, $cl(S) \in H^{p,p}(V) \cap H^{2p}(V,\mathbb{Z})$.
Conjetura original de Hodge: vale la recíproca.
Es falsa (Atiyah-Hirzebruch). Enunciado actual:

Conjetura de Hodge: $H^{p,p}(V) \cap H^{2p}(V,\mathbb{Q})$ *está generado* $/\mathbb{Q}$ *por las clases de subvariedades algebraicas de* V *de codimensión* p.

Significado geométrico: mayormente conjetural.
Por ejemplo, ya que $H^{p,p}(V)$ está definido sobre $\mathbb{R}$, qué es

$$H^{p,p}(V) \cap H^{2p}(V, \mathbb{Z})?$$

Clase de una subvariedad $j : S \hookrightarrow V$: clase de De Rham $[\alpha]$ de V t. q. $\forall \beta$

$$\int_V \alpha \wedge \beta = \int_S j^*(\beta).$$

Para S algebraica, $cl(S) \in H^{p,p}(V) \cap H^{2p}(V, \mathbb{Z})$.
Conjetura original de Hodge: vale la recíproca.
Es falsa (Atiyah-Hirzebruch). Enunciado actual:

Conjetura de Hodge: $H^{p,p}(V) \cap H^{2p}(V, \mathbb{Q})$ *está generado* $/\mathbb{Q}$ *por las clases de subvariedades algebraicas de* V *de codimensión* p.

– Clases algebraicas son difíciles de construir
– Consecuencias misteriosas hacen dudar, no hay consenso.
– Ver Deligne en claymath.com, abelprize.no

Otras definiciones de EH

– Filtración

$$H = F^0 \supset F^1 \supset ... \supset F^k \supset 0$$

s.t. $\forall p$,

$$H = F^p \oplus \overline{F^{k-p+1}}.$$

Relación con anterior:

$$F^p = H^{k,0} \oplus ... \oplus H^{p,k-p} \qquad H^{p,q} = F^p \cap \overline{F^q}.$$

Otras definiciones de EH

– **Filtración**

$$H = F^0 \supset F^1 \supset ... \supset F^k \supset 0$$

s.t. $\forall p$,

$$H = F^p \oplus \overline{F^{k-p+1}}.$$

Relación con anterior:

$$F^p = H^{k,0} \oplus ... \oplus H^{p,k-p} \qquad H^{p,q} = F^p \cap \overline{F^q}.$$

– **Representación** de grupos algebraicos reales

$$\phi : \mathbb{C}^* \to GL(H_{\mathbb{R}})$$

t.q.

$$\phi : \mathbb{Q}^* \to GL(H_{\mathbb{Q}}), \qquad \phi(-1) = (-1)^k.$$

Otras definiciones de EH

– **Filtración**

$$H = F^0 \supset F^1 \supset ... \supset F^k \supset 0$$

s.t. $\forall p$,

$$H = F^p \oplus \overline{F^{k-p+1}}.$$

Relación con anterior:

$$F^p = H^{k,0} \oplus ... \oplus H^{p,k-p} \qquad H^{p,q} = F^p \cap \overline{F^q}.$$

– **Representación** de grupos algebraicos reales

$$\phi : \mathbb{C}^* \to GL(H_{\mathbb{R}})$$

t.q.

$$\phi : \mathbb{Q}^* \to GL(H_{\mathbb{Q}}), \qquad \phi(-1) = (-1)^k.$$

Relación con anterior: esto implica $\phi(r) = r^k I \ \forall r$ real y

$$H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}, \qquad \phi(z) = z^p \bar{z}^q I \ \ en \ H^{p,q}.$$

Polarización

Forma bilineal no degenerada

$$Q : H_{\mathbb{Q}} \times H_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}, \qquad Q(u,v) = (-1)^k Q(v,u)$$

(1) $Q(F^p, F^{k-p+1}) = 0$
(2) $Q(u, \phi(i)\bar{v}) >> 0.$
Equivalentemente:
$H = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$ es ortogonal bajo $Q(u,\bar{v})$ y en $H^{p,q}$

$$i^{p-q} Q(u,\bar{v}) >> 0.$$

Polarización

Forma bilineal no degenerada

$$Q : H_{\mathbb{Q}} \times H_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}, \qquad Q(u,v) = (-1)^k Q(v,u)$$

(1) $Q(F^p, F^{k-p+1}) = 0$
(2) $Q(u, \phi(i)\bar{v}) >> 0.$
Equivalentemente:
$H = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$ es ortogonal bajo $Q(u,\bar{v})$ y en $H^{p,q}$

$$i^{p-q} Q(u,\bar{v}) >> 0.$$

Caso geométrico: $\omega =$ forma de Kahler en V (clase de $V \cap$(hiperplano))

$$Q([a],[b]) = \int_V a \wedge b \wedge \omega^{n-k}$$

polariza a la EH en la comologia primitiva

$$H^k_{prim}(V,\mathbb{C}) = \ker(\omega^{n-k+1} \wedge \cdot)$$

(1) y (2): Relaciones Bilineales de Riemann-Hodge.

Las Estructuras de Hodge forman una categoría abeliana.
Las que tienen $\dim F^p$ fijas forman una variedad real homogenea.

Las EH polarizadas forman una categoría abeliana semisimple.
Las que tienen $\dim F^p$ fijas forman una variedad compleja homogénea

$$\mathcal{M} = Aut(Q, \mathbb{R})/V.$$

Las Estructuras de Hodge forman una categoría abeliana.
Las que tienen $\dim F^p$ fijas forman una variedad real homogenea.

Las EH polarizadas forman una categoría abeliana semisimple.
Las que tienen $\dim F^p$ fijas forman una variedad compleja homogénea

$$\mathcal{M} = Aut(Q, \mathbb{R})/V.$$

Para k impar Q es antisimétrica y

$$\mathcal{M} = \frac{Sp(m, \mathbb{R})}{U(m_1) \times ... \times U(m_r)}$$

$\sum m_i = m.$

Las Estructuras de Hodge forman una categoría abeliana.
Las que tienen $\dim F^p$ fijas forman una variedad real homogenea.

Las EH polarizadas forman una categoría abeliana semisimple.
Las que tienen $\dim F^p$ fijas forman una variedad compleja homogénea

$$\mathcal{M} = Aut(Q, \mathbb{R})/V.$$

Para k impar Q es antisimétrica y

$$\mathcal{M} = \frac{Sp(m, \mathbb{R})}{U(m_1) \times ... \times U(m_r)}$$

$\sum m_i = m$.

Para k par: Q es simétrica y

$$\mathcal{M} = \frac{O(2m, n; \mathbb{R}))}{U(m_1) \times ... \times U(m_r) \times SO(n_1) \times ... \times SO(n_s)}$$

$\sum m_i = m$, $\sum n_i = n$.
V compactos de rango $=$ rango G, pero no maximales.

Grupo de Mumford-Tate de una EHP $(H_{\mathbb{Q}}, F, Q) = (H_{\mathbb{Q}}, \phi, Q)$:

$$\phi(S^1) \subset G_{MT}(H_{\mathbb{Q}}, F, Q) \subset Aut(Q, \mathbb{R})$$

clausura de $\phi(S^1)$ como subgrupo algebraico real definido $/\mathbb{Q}$.

Dominio de Mumford-Tate: órbita

$$G_{MT}(H_{\mathbb{Q}}, F, Q) \cdot F = \mathcal{M}_{(H_{\mathbb{Q}}, F, Q)}$$

Siempre $= G/V$ con G semisimple real y V compacto de la forma $V = G \cap$[parabólico de $G_{\mathbb{C}}$].

$$G/V$$

es compleja y el centralizador de $\phi(S^1)$ en V es toro maximal de G.

Grupo de Mumford-Tate de una EHP $(H_{\mathbb{Q}}, F, Q) = (H_{\mathbb{Q}}, \phi, Q)$:

$$\phi(S^1) \subset G_{MT}(H_{\mathbb{Q}}, F, Q) \subset Aut(Q, \mathbb{R})$$

clausura de $\phi(S^1)$ como subgrupo algebraico real definido $/\mathbb{Q}$.

Dominio de Mumford-Tate: órbita

$$G_{MT}(H_{\mathbb{Q}}, F, Q) \cdot F = \mathcal{M}_{(H_{\mathbb{Q}}, F, Q)}$$

Siempre $= G/V$ con G semisimple real y V compacto de la forma $V = G \cap$[parabólico de $G_{\mathbb{C}}$].

$$G/V$$

es compleja y el centralizador de $\phi(S^1)$ en V es toro maximal de G.

Relacion con las clases de Hodge $H^{p,p}(V) \cap H^{2p}(V, \mathbb{Z})$:

Vectores de Hodge:

$$H^{p,p} \cap H_{\mathbb{Q}}$$

Tensores:

$$\mathbf{T}(H)^{p,p} \cap \mathbf{T}(H_{\mathbb{Q}})$$

bajo

$$H^{p,q}(A \otimes B) = \bigoplus_{p_1+p_2=p, q_1+q_2=q} H^{p_1,q_1}(A) \otimes H^{p_2,q_2}(B)$$

Teorema: *$G_{MT}(H_{\mathbb{Q}}, F, Q)$ es el subgrupo de $Aut(Q, \mathbb{R})$ de elementos que fijan los tensores de Hodge.*

Vectores de Hodge:

$$H^{p,p} \cap H_{\mathbb{Q}}$$

Tensores:

$$\mathbf{T}(H)^{p,p} \cap \mathbf{T}(H_{\mathbb{Q}})$$

bajo

$$H^{p,q}(A \otimes B) = \bigoplus_{p_1+p_2=p, q_1+q_2=q} H^{p_1,q_1}(A) \otimes H^{p_2,q_2}(B)$$

Teorema: *$G_{MT}(H_{\mathbb{Q}}, F, Q)$ es el subgrupo de $Aut(Q, \mathbb{R})$ de elementos que fijan los tensores de Hodge.*

Comología automorfa

Forma automorfas clásicas (Harish-Chandra):

$$H^0(G/K, E)^{\Gamma}$$

– G/K simétrico hermitiano.
– $\Gamma \subset G$ discreto, $vol(\Gamma/G)$ finito.
– $E \to G/K$ fibrado holomorfo homogéneo.

Formas automorfas no-clásicas (Griffiths-Schmid):

Analogo para G/V de Mumford-Tate, o sea

– V compacto y G/V complejo, pero no simetrico. i.e.,

– $V = G\cap$[parabólico de $G_{\mathbb{C}}$] compacto, pero no maximal.

Formas automorfas no-clásicas (Griffiths-Schmid):

Analogo para G/V de Mumford-Tate, o sea
– V compacto y G/V complejo, pero no simetrico. i.e.,
– $V = G\cap$[parabólico de $G_{\mathbb{C}}$] compacto, pero no maximal.

Pero en tal caso $H^0(G/V, E) = 0$! En efecto,

$$H^q(G/V, E) = 0$$

$\forall q \neq \frac{1}{2} \dim K/V$.

Formas automorfas no-clásicas (Griffiths-Schmid):

Analogo para G/V de Mumford-Tate, o sea
– V compacto y G/V complejo, pero no simetrico. i.e.,
– $V = G \cap$[parabólico de $G_{\mathbb{C}}$] compacto, pero no maximal.

Pero en tal caso $H^0(G/V, E) = 0$! En efecto,

$$H^q(G/V, E) = 0$$

$\forall q \neq \frac{1}{2} \dim K/V$. Para este q_o,

$$H^{q_o}(G/V, E) \neq 0$$

y representa unitariamente a G (Schmid).

Formas automorfas no-clásicas (Griffiths-Schmid):

Analogo para G/V de Mumford-Tate, o sea

– V compacto y G/V complejo, pero no simetrico. i.e.,

– $V = G \cap$[parabólico de $G_{\mathbb{C}}$] compacto, pero no maximal.

Pero en tal caso $H^0(G/V, E) = 0$! En efecto,

$$H^q(G/V, E) = 0$$

$\forall q \neq \frac{1}{2} \dim K/V$. Para este q_o,

$$H^{q_o}(G/V, E) \neq 0$$

y representa unitariamente a G (Schmid).

Comología automorfa:

$$H^{q_o}(G/V, E)^{\Gamma}.$$

– Dimensión finita?

– Geometría de G/V?

– Compactificaciones?

Ver Proceedings de Griffiths TCU 2013

Variación de estructuras de Hodge

$$(S, \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{F})$$

– S variedad compleja suave
– $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \to S$ sistema local de $\mathbb{Z}$-modulos libres
– $\mathcal{F}$ filtracion holomorfa de $\mathbb{C} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$
t.q. $((\mathcal{H}_{\mathbb{Z}})_s, \mathcal{F}_s)$ es una EH y

$$\partial_X \mathcal{F}^p \subset \mathcal{F}^{p-1}.$$

Equivalentemente: fibrado holomorfo $\mathcal{H} \to S$ con una conexión playa ∇, una estructura entera $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ playa, y una filtración holomorfa $\mathcal{F}$ t.q.

$$\nabla_X \mathcal{F}^p \subset \mathcal{F}^{p-1}$$

Polarizada, si $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ viene con una forma $\mathcal{Q}$ playa que polariza en cada fibra.

Ejemplo: $f : \mathcal{V} \to S$ familia de variedades algebraicas,

$$\mathcal{H}_{\mathbb{K}} \to S$$

fibrado vectorial con fibra $(\mathcal{H}_{\mathbb{K}})_s = H^k(V_s, \mathbb{K})$ y haz de secciones

$$\Gamma(\mathcal{H}_{\mathbb{K}}) = R_f^k(\mathbb{K})$$

Conexión playa de de Gauss-Manin.

Teorema (Griffiths):

$$\mathcal{H}_s = H^{k,0}(V_s) \oplus \ldots \oplus H^{0,k}(V_s)$$

es una variación de EH, polarizada en la parte primitiva.
$\pm$ obvio, excepto por

$$\nabla_X \mathcal{F}^p \subset \mathcal{F}^{p-1}$$

Transversalidad u horizontalidad de Griffiths, sistema diferencial no-integrable.

Lugares de Hodge

$$(S, \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{F}, Q)$$

variación de EH polarizada de peso $2p$ sobre S algebraica.

$$v \in \Gamma(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}})$$

sección, en general multivaluada. El **locus de Hodge** de v es

$$S_v = \{s \in S : \ v(s) \in \mathcal{H}_s^{p,p}\}$$

Teorema (Cattani-Deligne-K). *S_v es una subvariedad algebraica de S*

– No hay demostración algebraica, aun en caso geometrico.
– En este caso sería consecuencia de la CH.
– A. Weil sugirió refutar la CH encontrando un contraejemplo ... etc.

Estructuras de Hodge mixtas

$$(H_{\mathbb{Q}}, W, F)$$

$$... \subset W_r \subset W_{r+1} \subset ... \subset H_{\mathbb{Q}}$$

$$H_{\mathbb{C}} \supset ... \supset F^p \supset F^{p+1} \supset ...$$

t.q.

$$(Gr^W(H_{\mathbb{Q}}), Gr^{W_{\mathbb{C}}}(F))$$

es una EH.

Teorema (Deligne): *Para toda V algebraica (posiblemente singular o abierta) $H^k(V, \mathbb{Q})$ tiene una EH mixta funtorial.*

W se representa por clases de De Rham $[\alpha]$ en $V' =$ puntos suaves de V, de acuerdo al crecimiento de α cerca de $\bar{V} - V'$.

Teorema (Schmid): *Sea* $((\mathcal{H}_{\mathbb{Z}})_s, \mathcal{F}_s)$ *una variación de EHP sobre* Δ^* *con monodromía unipotente* $\exp N$. *Entonces*

$$F_o = \lim_{s \to 0} \exp(-\frac{\log s}{2\pi i} N)\mathcal{F}_s$$

existe y define una EH mixta con $W = W(N)$.

– El borde de dominios de Mumford-Tate consiste de EH mixtas.

– Las EH mixtas forman una categoría abeliana.

– Las que tienen W y $\dim F$ fijas y las EH en Gr^W polarizadas, forman una variedad homogénea compleja.

Clase II: Conjetura de Hodge. Lugares de Hodge y Variaciones.

Clase III: Descomposición de Hodge para variedades proyectivas: idea de la demostración y consecuencias geométricas,

o

Geometría de G/V. Comología característica.

La estructura de Hodge de una variedad

Riemann (1835): *Para toda superficie de Riemann cerrada suave:*

$$H^1(V,\mathbb{C}) = \Omega^1(V) \oplus \overline{\Omega^1(V)}$$

Hodge(1935): *Para toda V compleja proyectiva suave*

$$H^k(V,\mathbb{C}) = H^{k,0}(V) \oplus H^{k-1,1}(V) \oplus ... \oplus H^{0,k}(V)$$

– No vale para toda V compacta compleja.

– Kahler-Hodge: sí para toda compacta kahleriana.

– $V \subset \mathbb{C}P^n$ algebraica implica kahleriana, porque la métrica de Fubini-Study lo es.
F-S está definida por

$$\mathbb{C}P^n \cong S^{2n+1}/S^1$$

que viene de la fibración de Hopf $S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, que viene de restringir la proyeccion canónica $(\mathbb{C}^{n+1} - 0) \to \mathbb{C}P^n$ a $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} - 0$.

La forma de Kahler de la métrica g_{FS}

$$\omega(X, Y) = g_{FS}(X, JY)$$

resulta

$$\omega = \sum_{i<j} \frac{\partial^2 \log(1 + \sum |z_j|^2)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

que es cerrada.

La forma de Kahler de la métrica inducida en una subvariedad compleja es la restricción de la forma de Kahler ambiente. Por lo tanto, kahleriana induce kahleriana, QED.

– Kahler compacta es algebraica sii $[\omega] \in H^k(M, \mathbb{Z})$
– No se sabe cuando una variedad compleja es kahlerizable.

Teorema de Hodge. *Para toda variedad compleja compacta V que admite una metrica de Kahler hay una descomposicion funtorial*

$$H^k(V,\mathbb{C}) = H^{k,0}(V) \oplus H^{k-1,1}(V) \oplus ... \oplus H^{0,k}(V)$$

donde $H^{p,q}(V) =$ clases de De Rham representables por formas que de tipo (p,q), localmente $\sum_{|I|=p,|J|=q} f_{IJ}\ dz_I \wedge d\bar{z}_J$.

Mas aun,
(a) *Hay isomorfismos canonicos*

$$H^{p,q}(V) \cong H^q_{\mathrm{haces}}(V,\Omega^p_V) \cong H^{p,q}_{\bar\partial}(V)$$

$\Omega^p_V =$ *p-formas holomorfas*
$H^{p,q}_{\bar\partial}(V) =$ *comologia (de Dolbeault) del diferencial*

$$\bar\partial : \Lambda^{p,q} \to \Lambda^{p,q+1}$$

(b) *Si g es una metrica de Kahler, d^* el adjunto de d*

$$g(d\alpha, \beta) = g(\alpha, d^*\beta)$$

y

$$\Delta = dd^* + d^*d$$

entonces

$$H^{p,q}(V) \cong \{\alpha \in \Lambda^{p,q}(V) : \quad \Delta\alpha = 0\}.$$

Consecuencias inmediatas:

– $b_{2k+1}(V)$ es par (mientras que $b_{2k}(V) \neq 0$, porque $[\omega^k] \neq 0$).
– Generalizacion del Teorema de Riemann:

$$\Omega^k(M) \cong H^{k,0}(M)$$

– $\Omega^k(\mathbb{C}P^n) = 0$ para todo $k > 0$:

$$H^{2k+1}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}) = 0, \qquad dim H^{2k}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}) = 1$$

de manera que $H^{2k+1,0}(\mathbb{C}P^n) = 0$, y

$$H^{2k}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}) = H^{k,k}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{C}[\omega^k]$$

y por lo tanto tambien $H^{2k,0}(M) = 0$.

– Para V algebraica, hay construcciones algebraicas de la filtracion de Hodge

$$F^p(H^k(V,\mathbb{C}))$$

$(= H^{k,0} \oplus ... \oplus H^{p,k-p})$ [p.ej. Deligne-Illusie 1989] ... Pero no hay demostracion algebraica de

$$H^k(V,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} F^p \cap \overline{F^q}.$$

El TdeH usa:
– El Teorema de Hodge para formas suaves en variedades riemannianas o hermitianas compactas: $\dim \ker \Delta < \infty$ y

$$\Lambda^k(M) = \ker \Delta \oplus \mathrm{i}m\Delta = \mathfrak{H} \oplus d\Lambda^{k-1}(M) \oplus d^*\Lambda^{k+1}(M)$$

– Kahler $\Rightarrow dd^* + d^*d = 2(\partial\partial^* + \partial^*\partial) = 2(\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})$.
Esto implica que Δ preserva tipo, las componentes de Hodge de una forma armonica son armonicas $\Rightarrow$ descomposicion en tipos.

Conjetura de Hodge

La clase de una subvariedad $j : S \hookrightarrow V$ es la clase de comologiá de De Rham

$$cl(S) \in H^{2p}(V, \mathbb{Z})$$

de V t. q. $\forall \beta$

$$\int_V \alpha \wedge \beta = \int_S j^*(\beta).$$

Que subvariedades tienen sus clases en $(H^{p,q} \oplus H^{q,p}) \cap H_k(V, \mathbb{Z})$, o en

$$(H^{p,q} \oplus H^{p-1,q+1} \oplus ... \oplus H^{q+1,p-1} \oplus H^{q,p}) \cap H_k(V, \mathbb{Z})$$

o al menos en

$$H^{p,p}(V) \cap H^{2p}(V, \mathbb{Z})?$$

Teorema: *Si S es algebraica de codimensión compleja p, entonces*

$$cl(S) \in H^{p,p}(V) \cap H^{2p}(V, \mathbb{Z})$$

Demostración:

$$\int_M cl(S) \wedge \mu \;=\; \sum_{a+b=2m-2p} \int_M cl(S) \wedge \mu^{(a,b)} = \sum_{a+b=2n-2p} \int_Z \mu^{a,b}$$

Si $(a,b) \neq (p,p)$, esto es 0: S esta dada localmente como

$$S = \{(0, ..., 0, z_{p+1}, ..., z_m)\}$$

Las $dz_1, d\bar{z}_1, ..., dz_p, d\bar{z}_p$ se anulan on S. Las únicas formas de grado $2m-2p$ que no involucran a éstas son de la forma

$$f \;\, dz_{p+1} \wedge ... \wedge dz_m \wedge d\bar{z}_{p+1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_m$$

de tipo $(m-p, m-p)$. Por lo tanto

$$\int_X cl(S) \wedge \mu = \int_Z \mu^{(n-p,n-p)} = \int_X cl(S)^{(p,p)} \wedge \mu^{(n-p,n-p)} = \int_X cl(S)^{(p,p)} \wedge \mu.$$

de manera que $cl(S) = cl(S)^{(p,p)}$, QED.

Conjetura de Hodge original: $H^{p,p}(V) \cap H^{2p}(V, \mathbb{Z})$ *son exactamente las clases de subvariedades algebraicas de* V *de codimensión* p.

Atiyah-Hirzebruch: falsa, reemplazada por

Conjetura de Hodge: $H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Q})$ *esta generado por las clases de subvariedades algebraicas de codimension* p.

CIERTA PARA:

– Para toda M^m y $p = 1, m - 1$ – demostracion abajo.

Por lo tanto,

– Para dim $M = 2, 3$ y todo p – porque las subvariedades son de dimension o codimension 1.

Tambien

– Variedades bandera.

– Hipersurperficies de grado ≤ 2.

– Algunas Fermat; algunas abelianas; etc.

Demostracion para $p = 1$

$$0 \to \mathbb{Z} \to \Omega \to \Omega^* \to 0$$

$\Omega =$ haz de funciones holomorfas sobre V, $\Omega^* = \ldots$ nunca 0. De la sucesion larga en comologia,

$$H^1(M, \Omega^*) \to H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \Omega)$$

$$H^1(M, \Omega^*) \to H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^{0,2}(M)$$

Por Hodge

$$H^2(M, \mathbb{C}) = H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M) \oplus H^{0,2}(M)$$

y se ve que $H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^{0,2}(M)$ es la proyección. Entonces

$$H^1(M, \Omega^*) \to H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^{0,2}(M) \to 0$$

es exacta y

$$\ker[H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^{0,2}(M)] = H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$$

($H^{0,2}$ no está porque la aplicación es real).

La s.exacta

$$H^1(M,\Omega^*) \to H^2(M,\mathbb{Z}) \to H^{0,2}(M) \to 0$$

deviene

$$H^1(M,\Omega^*) \to H^{1,1}(M) \cap H^2(M,\mathbb{Z}) \to 0$$

$$L \mapsto Ch(L).$$

Conclusion: toda clase entera de tipo (1,1) es la clase de Chern de un fibrado en rectas.

Si L es un fibrado en rectas, s una seccion holomorfa no trivial de L y $S \subset M$ sus ceros, entonces $Ch(L) = cl(S)$. Por lo tanto

Toda clase entera de tipo (1,1) es la clase de una hipersuperficie algebraica

Pero ciertas consecuencias hacen dudar ... Por ejemplo, *asociada a toda variedad proyectiva suave hay un numero finito de otras de la misma dimension*.

Sea

$$M' \hookrightarrow M \times M$$

la diagonal,

$$cl(M') \in H^{2m}(M \times M, \mathbb{Z}) \cap H^{m,m}(M \times M)$$

su clase. Mayer-Vietoris:

$$H^{2m}(M \times M, \mathbb{Z}) = \sum_{r+s=2m} H^r(M, \mathbb{Z}) \otimes H^s(M, \mathbb{Z})$$

$$cl(M') = \sum_{r+s=2m} c^r \otimes c^s$$

con cada sumando de tipo (m, m):

$$c^r \otimes c^s \in H^{2m}(M \times M, \mathbb{Z}) \cap H^{m,m}(M \times M).$$

Si la conjetura de Hodge es cierta, deben existir subvariedades algebraicas $M_j^{r,s} \hookrightarrow M \times M$ de dimension (y codimension) m y numeros racionales $\mu_j^{r,s}$ t.q.

$$c^r \otimes c^s = \sum_j \mu_j^{r,s} \; cl(M_j^{r,s}).$$

Si bien $M, M_j^{r,s}$ son algebraicas, seguramente

$$M \to \{M_j^{r,s}\}$$

es trascendente.

Otra consecuencia sospechosa (A. Weil, 1980): *"In an algebraic family, generically smooth, the condition for an integral cycle to be* (p, p)*, is algebraic"*

... pero demostrada cierta independientemente, "evidencia mas fuerte en favor de la validez de la CH"

• Explicacion:
Sea $f : M \to T$ algebraica, propia, suryectiva, con M, T algebraicas conexas no-singulares. Las fibras

$$M_t = f^{-1}(t)$$

son suaves para $t \in T^o =$ complemento de un divisor.

$$H^{2p}(M_t, \mathbb{Q}) \approx H^{2p}(M_{t_o}, \mathbb{Q})$$

mod monodromia (accion de $\pi_1(T^o)$), así que tiene sentido hablar de un $\phi \in H^{2p}(M_t, \mathbb{Q})$ fijo, cuyas componentes de Hodge $\phi = \sum \phi_t^{p,q}$ dependen de t.
Es

$$L(\phi) = \{t \in T^o \mid \phi = \phi_t^{(p,p)}\}$$

algebraico?
Es decir, es la intersección con T^o de algun $LT \subset T$ algebraico?
Si vale la CdeH, una seccion de Hodge (entera y de tipo (p,p)) u en comologia define una familia subvariedades algebraicas.

Mas precisamente, dados enteros enteros a, b, sea

$$T_{a,b} = \{t \in T : \; u(t) = \frac{1}{a}(Y_t^+ - Y_t^-)\}$$

con $Y_t^{\pm}$ efectivos de grado $\leq b$. Entonces Baire $\Rightarrow$ $T_{a,b}$ es denso en un abierto para $a, b >> 0$. Pero la variedad de Chow de ciclos agebraicos efectivos de grado acotado es algebraica, QED.

– Deligne's generalization of Weil: *S*ea $\mathcal{V}$ variacion de estructuras de Hodge polarizadas de peso $2p$ sobre T^o quasi-proyectivo. Sea σ seccion entera (multivaluada). Entonces
(a) LT^o donde σ es (p, p), es algebraico
(b) σ es invariante bajo la monodromia.

[CDK]: (a) verdadero, (b) falso
Cattani-Kaplan (1985): contrajemplo a invariancia por monodromia.

– C Voisin improved: if flat integral section is defined over $k \subset \bar{\mathbb{Q}}$, so is T^o.

If (V_Z, F) is a variation of polarized Hodge structure of weight $2p$ on a complex manifold S, its integral Hodge locus is

$$L = \{(s, u) : \ s \in S, \ u \in F^p_s \cap (V_Z)_s\}.$$

If Q is a fixed polarizing form of (V_Z, F) and K any positive number, define

$$L_K = \{(s, u) s.t. \ Q(u, u) \leq K\}.$$

What we actually prove is that
Theorem If S is algebraic, then L_K is an algebraic subvariety of F^p, finite over S.
Esto es
(a) Mas fuerte que lo implicado por la CH
(b) En contra de lo previsto por geometria (contraejemplos de Kollar a la CH entera).

Demostracion de la CH para $p = 1$

Teorema (1,1) de Lefschetz: *Toda clase entera de tipo (1,1) en una variedad algebraica suave es la clase de una hipersuperficie algebraica.*

Demostracion de la CH para $p = 1$

Teorema (1,1) de Lefschetz: *Toda clase entera de tipo (1,1) en una variedad algebraica suave es la clase de una hipersuperficie algebraica.*
Dem.:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \Omega \to \Omega^* \to 0$$

$\Omega =$ haz de funciones holomorfas sobre V, $\Omega^* = \ldots$ nunca 0. De la sucesion larga en comologia,

$$H^1(M, \Omega^*) \to H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \Omega)$$

que es

$$H^1(M, \Omega^*) \to H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^{0,2}(M)$$

que es

$$[L] \mapsto Ch(L) \qquad \text{proy. segun}$$

$$H^2(M, \mathbb{C}) = H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M) \oplus H^{0,2}(M)$$

Entonces

$$H^1(M,\Omega^*)\to H^2(M,\mathbb{Z})\to H^{0,2}(M)\to 0$$

es exacta y

$$\ker[H^2(M,\mathbb{Z})\to H^{0,2}(M)] = H^{1,1}(M)\cap H^2(M,\mathbb{Z}) =_{def} H^{1,1}_{\mathbb{Z}}(M)$$

($H^{0,2}$ no está porque la aplicación es real). Resulta

$$H^1(M,\Omega^*)\to H^{1,1}_{\mathbb{Z}}(M)\to 0$$

$$L\mapsto Ch(L).$$

Conclusión: toda clase entera de tipo (1,1) es la clase de Chern de un fibrado en lineas.

Si $\sigma\in\Gamma(L)$ no es $\equiv 0$ y $S\subset M$ su divisor de ceros, entonces $Ch(L)=cl(S)$, QED.

Pero ciertas consecuencias hacen dudar ... por ejemplo

Pero ciertas consecuencias hacen dudar ... por ejemplo

M proyectiva suave,

$$M' \hookrightarrow M \times M$$

la diagonal,

$$cl(M') \in H^{2m}(M \times M, \mathbb{Z}) \cap H^{m,m}(M \times M)$$

su clase como subvariedad de $M \times M$. Mayer-Vietoris:

$$H^{2m}(M \times M, \mathbb{Z}) = \sum_{r+s=2m} H^r(M, \mathbb{Z}) \otimes H^s(M, \mathbb{Z})$$

$$cl(M') = \sum_{r+s=2m} c^r \otimes c^s$$

Cada sumando es de tipo (m, m):

$$c^r \otimes c^s \in H^{2m}(M \times M, \mathbb{Z}) \cap H^{m,m}(M \times M).$$

Si la conjetura de Hodge es cierta, deben existir $M_j^{r,s} \subset M \times M$ algebraicas y números racionales $\mu_j^{r,s}$ t.q.

$$c^r \otimes c^s = \sum_j \mu_j^{r,s} \; cl(M_j^{r,s}).$$

Si bien $M, M_j^{r,s}, \mu_j^{r,s}$ son algebraicos,

$$M \to \{M_j^{r,s}, \mu_j^{r,s}\}$$

es seguramente trascendente.

Si la conjetura de Hodge es cierta, deben existir $M_j^{r,s} \subset M \times M$ algebraicas y números racionales $\mu_j^{r,s}$ t.q.

$$c^r \otimes c^s = \sum_j \mu_j^{r,s} \; cl(M_j^{r,s}).$$

Si bien $M, M_j^{r,s}, \mu_j^{r,s}$ son algebraicos,

$$M \to \{M_j^{r,s}, \mu_j^{r,s}\}$$

es seguramente trascendente.

Otra consecuencia sospechosa (para A. Weil): *"In an algebraic family, generically smooth, the condition for an integral cycle to be (p,p), is algebraic"*

– Demostrada cierta independientemente y "evidencia mas fuerte en favor de la validez de la CH" (Voisin), quien demostró

–*Si la sección plana está definida sobre $k \subset \bar{\mathbb{Q}}$, tambien lo está T^o.*

– Si la familia es toda suave, no hay problema.

Explicación:
Sea $f : M \to T$ algebraica, propia, suryectiva, con M, T algebraicas conexas no-singulares. Las fibras

$$M_t = f^{-1}(t)$$

son suaves para $t \in T^o =$ complemento de un divisor.

$$H^{2p}(M_t, \mathbb{Q}) \approx H^{2p}(M_{t_o}, \mathbb{Q})$$

mod monodromia (accion de $\pi_1(T^o)$), así que tiene sentido hablar de un $\o \in H^{2p}(M_t, \mathbb{Q})$ fijo, cuyas componentes de Hodge $\o = \sum \o_t^{p,q}$ dependen de t.
Es

$$L(\o) = \{t \in T^o \mid \ \o = \o_t^{(p,p)}\}$$

algebraico?
Es decir, es la intersección con T^o de algun $LT \subset T$ algebraico?
Si vale la CdeH, una seccion de Hodge (entera y de tipo (p,p)) u en comologia define una familia subvariedades algebraicas.

Mas precisamente, dados enteros enteros a, b, sea

$$T_{a,b} = \{t \in T : \ u(t) = \frac{1}{a}(Y_t^+ - Y_t^-)\}$$

con $Y_t^{\pm}$ efectivos de grado $\leq b$. Entonces Baire $\Rightarrow$ $T_{a,b}$ es denso en un abierto para $a, b >> 0$. Pero la variedad de Chow de ciclos agebraicos efectivos de grado acotado es algebraica, QED.

– Deligne's generalization of Weil's question: *S*ea $\mathcal{V}$ variacion de estructuras de Hodge polarizadas de peso $2p$ sobre T^o quasi-proyectivo. Sea σ seccion entera (multivaluada). Entonces
(a) LT^o donde σ es (p, p), es algebraico
(b) σ es invariante bajo la monodromia.

Deligne para superficies de Riemann
Cattani-K.: (a) verdadero, (b) falso en general, pero no importa

El locus de Hodge de una variacion de EHP de peso $2p$ sobre una variedad compleja S, es

$$L = \{(s,u) :\ s \in S,\ u \in \mathcal{F}^p_s \cap (\mathcal{H}_Z)_s\}.$$

If Q is a polarizing form of (V_Z, F) and K any positive number, define

$$L_K = \{(s,u) s.t.\ Q(u,u) \leq K\}.$$

[CDK] dice que

Si S es algebraica, entonces L_K es algebraica en $\mathcal{F}^p$ y finita sobre S.

Voisin:

– Mas fuerte que lo implicado por la CH

– En contra de lo previsto por geometria

La distribución horizontal en dominios de Mumford-Tate

Fijamos $H_{\mathbb{Z}}$, Q, $\dim F^p$.

$$\mathcal{D} = G/V = \{F \ t.q. \ (H_{\mathbb{Z}}, F, Q) \text{ es una EHP}\}.$$

Dominio de períodos de Griffiths, o de Mumford-Tate

Métrica de Hodge es G-invariante pero no Kahler, a menos que sea simétrico. Pero es un abierto en

$$\hat{\mathcal{D}} = G_{\mathbb{C}}/P = \{F : \ Q(F^p, F^{k-p+1}) = 0\}$$

variedad proyectiva.

Un EH de peso k en $H_{\mathbb{Q}}$ determina una EH de peso 0 en $\mathfrak{g} = Lie(G)$

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \bigoplus \mathfrak{g}^{p,-p}$$

$$\mathfrak{g}^{p,-p} = \{X \in \mathfrak{g} : \ X(H^{r,s}) \subset H^{r+p,s-p}\}$$

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ actua infinitesimalmente en $\mathcal{D}$, con isotropía en F

$$Lie(P) = \bigoplus_{p \leq 0} \mathfrak{g}^{p,-p}.$$

Entonces

$$T_F(\mathcal{D}) \cong \bigoplus_{p > 0} \mathfrak{g}^{p,-p}$$

Distribución horizontal:

$$U \subset T(\mathcal{D})$$

$$U_{g \cdot F} = dg(\mathfrak{g}^{1,-1}).$$

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ actua infinitesimalmente en $\mathcal{D}$, con isotropía en F

$$Lie(P) = \bigoplus_{p \leq 0} \mathfrak{g}^{p,-p}.$$

Entonces

$$T_F(\mathcal{D}) \cong \bigoplus_{p>0} \mathfrak{g}^{p,-p}$$

Distribución horizontal:

$$U \subset T(\mathcal{D})$$

$$U_{g \cdot F} = dg(\mathfrak{g}^{1,-1}).$$

Dada una VESP $(M, \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{F}, Q)$, fijamos $o \in M$ y definimos su **aplicación de periodos**

$$\Phi : M \to \mathcal{D}/(\text{monodromia})$$

por $\Phi(x) =$ filtración de $\mathcal{H}_o$ que es traslación paralela de $\mathcal{F}_x$.

"Paralela" y "monodromía" se refieren a la conexión playa en $\mathcal{H}$ definida por $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ (Gauss-Manin).

Teorema (Griffiths): Φ *es holomorfa y tangente a* U

Teorema (Griffiths): Φ *es holomorfa y tangente a* U

– La VEHP es equivalente a su Φ.

– Para una familia de curvas, $\Phi(x) =$ períodos de integrales algebraicas de M_x vistas en el semiespacio superior de Siegel $Sp(n, \mathbb{R})/U(n)$.

Algunos Problemas:

– Determinar las subvariedades horizontales maximales de $\mathcal{D}$, o las aplicaciones de períodos Φ inextendibles.

– Determinar las que provienen de geometría (Grothendieck).

– Propiedades aritméticas. Ciclos de Hodge.

– Compactificación parcial $\mathcal{D} \subset \bar{\mathcal{D}}$ en direcciones horizontales.

En 1 variable: dados

– $N \in \mathfrak{g}$ nilpotente y definido $/\mathbb{Q}$

– $F \in \bar{\mathcal{D}}$

s.t.

– $N(F^p) \subset F^{p-1}$ s.t.

– $(W(N), F)$ estructura de Hodge mixta polarizada por N.

Entonces

$$\Phi(z) \in \mathcal{D}$$

para $\Im(z) >> 0$, es horizontal, y

$$\Phi(z+1) = \exp(N) \cdot \Phi(z)$$

Cualquier horizontal

$$f : \Delta^* \to \mathcal{D}/\Gamma$$

se levanta a

$$\tilde{f} : \mathbb{U} \to \mathcal{D}$$

horizontal t s.t. $f(z+1) = \exp(N)f(z)$, y

Comología característica

M variedad real o compleja
$D \subset T(M)$ distribución en M
Comología que detecte subvariedades integrales de D
$D^{\perp} \subset T^*(M)$ 1-formas que se anulan en D
$\mathcal{I}_D \subset \Omega^*(M)$ ideal de formas generado por las secciones de $D^{\perp}$ y sus diferenciales.
$\Omega^*(M)/\mathcal{I}_D$ es graduado y

$$d : \Omega^k/\mathcal{I}_D \to \Omega^{k+1}/\mathcal{I}_D$$

Comologia caracteristica de (M,D):

$$H^*_D(\Omega^*(M)/\mathcal{I}_D, d)$$

Por ejemplo, si D es **complemente no-integrable** (genera todo T bajo $[X, Y]$), las únicas funciones horizontales $Df = 0$ son las constantes. Si M es conexa,

$$\dim H^0_D = 1.$$

Equivalente a decir que todo par de puntos de M se puede unir por curvas D-horizontales (Teorema de Chow)

Teoria de Hodge para Com. Caract.?

Conjetura: H^*_D tiene una estructura de Hodge real funtorial.

Sea $g =$ subriemanniana or subhermitiana con soporte en D. Entonces d^* existe en $\Omega^*(M)/\mathcal{I}$ y

$$L = dd^* + d^*d$$

Problema: L es hipoelíptico sobre funciones, pero no sobre formas. Es necesario redefinir d^*. Para el caso de contacto, ver Rumin.

La distribucion horizontal en dominios de Mumford-Tate no es integrable, porque

$$[\mathfrak{g}^{1,-1}, \mathfrak{g}^{1,-1}] \subset \mathfrak{g}^{2,-2}$$

Tampoco es siempre completamente no-integrable, pero

$\tilde{D}$ = subhaz generado por D bajo corchetes. Supongamos dim $\tilde{D}$ constante, $\tilde{D} \subset T$ subfibrado. Es involutiva $\Rightarrow$ M se foliada por subvariedades integrales de $\tilde{D}$ donde D es completamente no-integrable.

Ver Griffiths-Robles.