Un enfoque Tannakiano a la teoría de Galois de Grothendieck

En el SGA I [2], Grothendieck desarrolla una teoría que tiene como caso particular la correspondencia de Artin-Galois entre extensiones finitas de $\mathbb{Q}$ y subgrupos abiertos (= acciones transitivas continuas) del grupo de Galois profinito $G(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Grothendieck trabaja con una categoría $\mathcal{C}$ munida de un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{E}ns_{<\infty}$ a valores en la categoría de conjuntos finitos, y construye un grupo profinito $Aut(F)$ cuyos elementos son los automorfimos de F. Luego demuestra una equivalencia de categorías $\mathcal{C} \xrightarrow{\tilde{F}} \mathcal{E}ns_{<\infty}^{Aut(F)}$ entre $\mathcal{C}$ y la categoría de acciones continuas del grupo $Aut(F)$.

Dubuc, en [1], generaliza el resultado de Grothendieck quitándole la hipótesis de finitud en los valores de F. Para ello necesita construir un grupo locálico $lAut(F)$ cuyos puntos son los automorfismos de F, y que bajo la hipótesis de finitud resulta isomorfo al grupo de sus puntos.

En la teoría de Tannaka segun Joyal [3], se trabaja con un funtor tensorial $\mathcal{C} \xrightarrow{F} Vec_{\mathbb{C}}^{<\infty}$ tomando valores en $\mathbb{C}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Se construye un álgebra de Hopf $End^{\vee}(F)$ (= grupo algebraico), y se da una equivalencia de categorías $\mathcal{C} \xrightarrow{\tilde{F}} Comod_{<\infty}(End^{\vee}(F))$ entre $\mathcal{C}$ y la categoría de comódulos de dimensión finita de la coálgebra $End^{\vee}(F)$ (= representaciones finitas del grupo algebraico).

Como ha sido observado por varios autores y demostrado explícitamente en [4], los desarrollos de Joyal-Tannaka pueden realizarse reemplazando la categoría $Vec_{\mathbb{C}}^{<\infty}$ por una categoría tensorial abstracta. Esto da lugar a la posibilidad de encarar otros problemas con un enfoque Tannakiano, es decir utilizando las mismas construcciones y técnicas.

En vista de que un grupo locálico no es otra cosa que un álgebra de Hopf en la categoría tensorial $\mathcal{S}up$ de sup-reticulados, y que el dato de un comódulo corresponde al dato de una acción continua, se propone contar cómo se puede estudiar con métodos tannakianos la teoría de Galois de Grothendieck descripta en el primer párrafo. Consideramos para esto el funtor $T : \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{E}ns_{<\infty} \to \mathcal{S}up$ que se obtiene componiendo a F con el funtor Sup-reticulado libre, tomando valores en la categoría tensorial de los Sup-reticulados. Se obtiene así el álgebra de Hopf $End^{\vee}(T)$ en la categoría $\mathcal{S}up$. Demostramos que la construcción tannakiana $End^{\vee}(T)$ resulta isomorfa al grupo de puntos del grupo locálico $lAut(F)$ de [1], que es el grupo profinito de automorfismos de F.

Se sigue de ello que los teoremas de representación de Tannaka y de Grothendieck son el mismo teorema, en las categorías tensoriales de los espacios vectoriales y de los Sup-reticulados respectivamente. Resta desarrollar una demostración unificada de los mismos, trabajo que se encuentra en preparación.

1. Dubuc, E. J., *Localic Galois Theory*, Advances in Mathematics 175/1 (2003) 144 -167.
2. Grothendieck A., *SGA1 (1960-61)*, Springer Lecture Notes in Mathematics 224 (1971).
3. Joyal A., Street R., *An Introduction to Tannaka Duality and Quantum Groups*, Category Theory, Springer, 1990.
4. Szyld M., *Sobre la dualidad de Tannaka*,
   cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/Szyld_Martin.pdf