Sobre la Conjetura del Rango Toral
en Álgebas de Lie 3-pasos nilpitentes graduadas

Hace más de 25 años Halperin [Hal] formuló la siguiente conjetura: Sea $\mathfrak{n}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita y sea $\mathfrak{z}$ el centro de $\mathfrak{n}$, entonces

$$\dim(H^*(\mathfrak{n})) \geq 2^{\dim(\mathfrak{z})}.$$

Esta conjetura permanece abierta en general y sólo ha sido demostrada para ciertas clases de álgebras de Lie nilpotentes. Por ejemplo se sabe que es verdadera si $\mathfrak{n}$ es 2-pasos nilpotente o si $\mathfrak{n}$ si es metabeliana split.

Esta conjetura tiene origen en la geometría. El rango toral $r(X)$ de una variedad diferenciable X es la dimensión del mayor toro que actúa en X libremente. Originalmente la conjetura afirma que $\dim H^*(X) \geq 2^{r(X)}$. Por un famoso teorema de Nomizu, la conjetura original se reduce a la versión algebraica cuando X es una nilvariedad.

Cuando el Si $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus ... \oplus \mathfrak{n}_k$ es álgebra de Lie k-pasos nilpotente y graduada, P. Tirao demuestra en [T1] que

$$\dim(H_*(\mathfrak{n})) \geq L(p)$$

donde $p(x) = (1-x)^{\dim \mathfrak{n}_1} ... (1-x^k)^{\dim \mathfrak{n}_k}$ y $L(p)$ es la suma de los valores absolutos de los coeficientes de p. En particular, la CRT es verdadera para toda $\mathfrak{n}$ nilpotente que admita una graduación tal que $L(p) \geq 2^{\dim(\mathfrak{z})}$. No es difícil ver que este argumento funciona para toda álgebra de Lie 2-pasos nilpotente.

Los principales resultados de este trabajo son:

1. Demostramos que si $\mathfrak{n}$ es 3-pasos nilpotente graduada y $\dim \mathfrak{n} \leq 22$, entonces $L(p) \geq 2^{\dim(\mathfrak{z})}$ y por lo tanto $\mathfrak{n}$ satisface la CRT.

2. Verificamos computacionalmente que lo afirmado anteriormente es verdadero si $\dim \mathfrak{n} < 100$.

3. Encontramos una familia de álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes graduadas, tal que para toda $\mathfrak{n}$ en esa familia se cumple que $L(p) < 2^{\dim(\mathfrak{z})}$. La mínima dimensión que aparece en esta familia es 212. No sabemos si estas álgebras de Lie satisfacen la CRT.

Referencias

[Hal] Halperin S., *Racional homotopy and torus actions*, Aspects of Topology in London Math, Soc. Lecture Note Ser. Vol.**93** (1985), 357-366.

[T1] Tirao P., *On the homology of graded Lie algebras*, Jour. of Pure and Applied Alg., **156**(2001), 357-366.