PRÁCTICO 1

Grupos y subgrupos.

(1) Decir en cada caso si $(G, *)$ es un grupo o no y, en caso afirmativo, si es abeliano o no.
  (a) $G = \mathbb{R}_{>0}$, con $a * b = a^b$.
  (b) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, con $(m, n) * (r, s) = (m + (-1)^n r, n + s)$.
  (c) $G = \mathcal{P}(X)$ (partes de X), con $A * B = A \cup B$.
  (d) $G = \mathcal{P}(X)$, con $A * B = A \cap B$.

(2) Probar que los siguientes son grupos, con la operación natural. Identificar la identidad y describir el inverso de cada elemento.
  (a) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
  (b) El grupo especial lineal, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$.
  (c) El grupo de unidades de $\mathbb{Z}_n$, $\mathcal{U}_n = \{a \in \mathbb{Z}_n : (a, n) = 1\}$.
  (d) El grupo de raíces n-ésimas de la unidad, $G_n = \{w \in \mathbb{C} : w^n = 1\}$.
  (e) El grupo de todas las raíces de la unidad, $G_\infty = \cup_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

(3) Probar que todos los grupos de orden ≤ 5 son abelianos. ¿Son todos cíclicos? ¿Cuántos grupos no isomorfos de orden 4 hay?

(4) Sea A una figura del plano, esto es un subconjunto del plano. Sea G el conjunto de transformaciones rígidas T del plano que preservan a A, es decir $T(A) = A$.
  (a) Probar que G con la composición es un grupo.
  (b) Dar ejemplos en los que este grupo es trivial, finito e infinito.
  (c) Dar ejemplos en los que G es abeliano y no abeliano.
  (d) En el caso en que $A = A_n$ es un polígono regular de n lados, G es el *grupo dihedral* D_n. Dar la tabla de multiplicar de D_3 y D_4.
  (e) Describir D_n, distinguiendo los casos n par y n impar.

(5) Escribir la tabla de multiplicar y dar el orden de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$ y de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_3)$. ¿Qué puede decir de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_4)$?

(6) Hallar en $\mathbb{S}_3$ y en $\mathbb{S}_4$ elementos de todos los ordenes posibles.

(7) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que $\{a, b\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{Z}$ si y sólo si $(a, b) = 1$.

(8) Sea $G = M_2(\mathbb{Z}_2)$. Calcular $|G|$ y encontrar subgrupos de G de orden 2, 4 y 8.

(9) Decir si en un grupo las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
  (a) $a = a^{-1} \Leftrightarrow a^2 = e$.
  (b) $a^m = a^n \Rightarrow n = m$.
  (c) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \Rightarrow ab = ba$.

(10) Hallar todos los subgrupos de: $\mathbb{Z}_3$; $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$; $\mathbb{S}_3$; D_4.

(11) Calcular el signo de las siguientes permutaciones:

$$(4267) \in \mathbb{S}_9; \quad (365)(173) \in \mathbb{S}_7; \quad (13254)(35) \in \mathbb{S}_6.$$

(12) Probar que

$$\mathcal{H} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es un subgrupo de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

(13) Probar que todos los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son cíclicos, mostrando que si H es un subgrupo de $\mathbb{Z}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H = n\mathbb{Z}$. ¿Es n único?

(14) Calcular el orden de x, $|x|$, en los siguientes casos:
  (a) $G = \mathbb{S}_8$, $x = (1235)(1378)$.
  (b) $G = \mathcal{H}$, $x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.
  (c) $G = \mathbb{C}^\times$, $x = \cos(2\pi/n) + i \operatorname{sen}(2\pi/n)$ con $n \in \mathbb{N}$.

(d) $G = \mathbb{C}^{\times}$, $x = \frac{1}{2}\cos(2\pi/n) + \frac{1}{2}i\,\mathrm{sen}(2\pi/n)$ con $n \in \mathbb{N}$.
(e) $G = \mathbb{C}^{\times}$, $x = \cos(m/n) + i\,\mathrm{sen}(m/n)$ con $n, m \in \mathbb{N}$.
(f) $G = \mathbb{Z}_n$, x arbitrario.

(15) Sean G grupo finito, $g \in G$ y p primo. Probar que

$$g = g_r g_u = g_u g_r,$$

donde $g_r, g_u \in G$ son tales que $(|g_r|, p) = 1$ y $|g_u| = p^k$, para algún k. Mostrar que g_r y g_u son únicos con esta propiedad.
(**Nota**: El elemento g_r se llama la parte *p-regular* de g y el elemento g_u se llama la parte *p-unipotente* de g.)

(16) Encontrar 4 subgrupos diferentes de $\mathbb{S}_4$ isomorfos a $\mathbb{S}_3$ y 9 subgrupos diferentes isomorfos a $\mathbb{S}_2$.

(17) Consideremos el grupo simétrico $\mathbb{S}_n$.
(a) Escribir al ciclo $(i_1 i_2 \dots i_r)$ como producto de trasposiciones.
(b) Mostrar que el producto de trasposiciones $(1i)(1j)(1i)$ es una trasposición. ¿Cuál?
(c) Probar que $\mathbb{S}_n$ está generado por las $n-1$ trasposiciones $(1i)$ con $i = 2 \dots n$.
(d) Calcular el producto de trasposiciones $(1\,j-1)(j-1\,j)(1\,j-1)$.
(e) Probar que $\mathbb{S}_n$ está generado por las $n-1$ trasposiciones $(i\,i+1)$ con $i = 2 \dots n$.
(f) Sean $\sigma = (12)$ y $\tau = (123 \dots n)$. Calcular $\sigma_i = \tau^i \sigma \tau^{-i}$.
(g) Probar que $\mathbb{S}_n$ está generado por σ y τ.

Homomorfismos.

(18) Sea $(G, \cdot)$ un grupo y sean $a, b \in G$.
(a) Probar que las siguientes aplicaciones de G en G son biyectivas y encontrar sus inversas.
  (i) $x \mapsto a \cdot x$.
  (ii) $x \mapsto a \cdot x \cdot b$.
  (iii) $x \mapsto a \cdot x \cdot a^{-1}$.
  (iv) $x \mapsto x^{-1}$.
  (v) $x \mapsto a \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$.
(b) Determinar cuáles de estas aplicaciones son morfismos.
(c) Determinar cuáles de estas aplicaciones son morfismos si G es abeliano.

(19) Decir cuáles de los siguientes grupos son isomorfos entre sí.

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2; \quad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4; \quad \mathbb{Z}_2 \oplus G_4; \quad \mathbb{Z}_8; \quad D_4; \quad G_8; \quad \mathcal{H}; \quad Q_8$$

donde Q_8 es el grupo de cuaterniones: $Q_8 = \{1, i, j, k\}$ con $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $(-1)i = -i$, $(-1)j = -j$ y $(-1)k = -k$.

(20) Sea $f : G \to G$ un morfismo de grupos. Probar que $\mathrm{ord}(f(x))$ divide a $\mathrm{ord}(x)$, si $\mathrm{ord}(x)$ es finito.

(21) Sean G, H grupos, y sean $f, g : G \to H$ homomorfismos de grupos. Entonces:
(i) $f(e_G) = e_H$.
(ii) $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.

(22) Decir si las siguientes funciones son homomorfismos, y en tal caso decir si son monomorfismos o epimorfismos.
(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a) := ma$, con $m \in \mathbb{Z}$.
(b) $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{12}$, $f(a) := 2a$.
(c) $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $f(a) := 3a$.

(23) Sea $f : G \to H$ homomorfismo de grupos. Probar que:
(a) $A < G \Rightarrow f(A) < H$.
(b) $B < H \Rightarrow f^{-1}(B) < G$.
(c) $\mathrm{Ker}(f) < G$, $\mathrm{Im}(f) < H$.

(24) Sea $f : G \to H$ homomorfismo de grupos, con f biyectiva. Probar que f^{-1} es un homomorfismo de grupos.

(25) Sea $f : G \to H$ un homomorfismo. Decir para cuáles de las siguientes propiedades P vale que "si G tiene P, entonces H tiene P". Hacer lo mismo asumiendo que f es epimorfismo y luego asumiendo que es monomorfismo.
  (a) Tener n elementos.
  (b) Ser finito.
  (c) Ser conmutativo.
  (d) Ser no conmutativo.
  (e) Ser cíclico.
  (f) Todo elemento tiene orden finito.
  (g) Todo elemento tiene orden infinito.

(26) Probar que son equivalentes:
  (a) G es abeliano.
  (b) La inversión $f : G \to G$, $f(x) = x^{-1}$, es un morfismo de grupos.
  (c) La aplicación $f : G \to G$ elevar al cuadrado, $f(x) = x^2$ es un morfismo de grupos.

(27) Probar que:
  (a) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \neq 0$.
  (b) No existe un epimorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
  (c) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$.

(28) Para los siguientes pares de grupos (G, H), calcular $\mathrm{Hom}(G, H)$ y $\mathrm{Hom}(H, G)$:

(a) $(G_n, \mathbb{Z})$. (b) $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$. (c) $(\mathbb{Z}, \text{grupo finito})$. (d) $(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, Z_4)$.

(29) Para los siguientes grupos G, calcular $\mathrm{End}(G)$ y $\mathrm{Aut}(G)$:

(a) $\mathbb{Z}$. (b) $\mathbb{Q}$. (c) $\mathbb{Z}_n$. (d) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Ejercicios adicionales

(30) Sea G un grupo. Denotemos por $|a|$ al orden de a en G. Entonces, para todo a y $b \in G$, valen:
  (a) $|a| = |a^{-1}|$.
  (b) $|ab| = |ba|$.
  (c) $|a| = |bab^{-1}|$.

(31) Sea G un grupo abeliano.
  (a) Si existen $a, b \in G$, con $|a| = m$, $|b| = n$, entonces existe $c \in G$ tal que $|c| = [m, n]$.
  (b) Sean p y q primos distintos. Si $|G| = pq$ y existen $a, b \in G$, con $|a| = p$ y $|b| = q$, entonces G es cíclico.

(32) Decir en cada caso si $(G, *)$ es un grupo o no y, en caso afirmativo, si es abeliano o no.
  (a) Dado $X \neq \emptyset$, $G = \{f : X \to X : f \text{ es inyectiva}\}$, con $f * g = f \circ g$. ¿Si X es finito?
  (b) Dado $X \neq \emptyset$, $G = \{f : X \to X : f \text{ es suryectiva}\}$, con $f * g = f \circ g$. ¿Si X es finito?
  (c) $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.
  (d) $G = \mathrm{Aff}(n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : f(x) = T(x) + \mathbf{v}, \text{ donde } T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$, con $f * g = f \circ g$.

(33) Determinar los elementos del subgrupo cíclico de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ generado por $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(34) Sea G un grupo finito de orden par. Mostrar que existe $a \neq e$ tal que $a^2 = e$.

(35) Si un grupo tiene sólo una cantidad finita de subgrupos, entonces es finito.

(36) Sea G un grupo y sean H_1 y H_2 dos subgrupos de G.
  (a) Probar que $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo.
  (b) ¿Qué sucede con la intersección de 3 o más subgrupos?
  (c) Probar que $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo si y sólo si $H_1 \subseteq H_2$ o $H_2 \subseteq H_1$.

(d) ¿Qué sucede con la unión de 3 o más subgrupos?

(37) Probar que $\left(\mathbb{Z}_p^\times, \cdot\right)$ es grupo si y sólo si p es primo.

(38) Sea G un grupo finito y sea $SG = \sum_{g\in G} g$.

(a) Probar que $SG = \displaystyle\sum_{g\in G:\, 2g=0} g$.

(b) Calcular SG para $G = \mathbb{Z}_n$.

(c) Calcular SG para $G = G_n$.

(39) Mostrar que D_n se puede generar con una rotación y una reflexión. ¿Son estas únicas? Dada la rotación, ¿es la reflexión única?

(40) Sean $k, m, p \in \mathbb{N}$, con p primo. Sea G un grupo de orden $p^k m$ y sean H y K subgrupos talee que $|H| = p^k$ y $|K| = p^d$ con $0 < d \leq k$. Mostrar que si $K \not\subseteq H$, entonces HK no es subgrupo de G.

(41) Probar que todos los subgrupos finitos de $\mathbb{C}^\times$ son cíclicos. Más aún, si H es un tal subgrupo, entonces $H = G_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

(42) Determinar si los siguientes pares de grupos son isomorfos o no.

$$(\mathbb{Z}_n, G_n); \quad (\mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5); \quad (\mathbb{R}, \mathbb{C}); \quad (\mathcal{U}_{16}, \mathcal{H}); \quad (\mathbb{A}_4, D_6)$$

(43) Sea G un grupo. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) G es abeliano.

(b) $(ab)^2 = a^2b^2$, $\forall\, a, b \in G$.

(c) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, $\forall\, a, b \in G$.

(d) $(ab)^n = a^nb^n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, a, b \in G$.

(e) $(ab)^n = a^nb^n$, $\forall\, a, b \in G$, para tres enteros consecutivos.

(44) Sea p un número primo. Definimos

$$R_p := \left\{ \tfrac{a}{p} \in \mathbb{Q} \,:\, (a,p) = 1 \right\}, \qquad R^p := \left\{ \tfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \,:\, b = p^i, \text{ con } i \geq 0 \right\}.$$

Mostrar que R_p y R^p son grupos abelianos con la suma de $\mathbb{Q}$.

(45) Sea G un grupo, $a, b \in G$, $r \in \mathbb{N}$. Si $bab^{-1} = a^r$, entonces $b^jab^{-j} = a^{r^j}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

(46) Sea G un grupo y $X \neq \emptyset$ y sea $F(X, G) = \{f : X \to G\}$, el conjunto de todas las funciones de X en G. Mostrar que $F(X, G)$ con la suma $f + g$ (punto a punto) definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, es un grupo. Más aún, es abeliano si G es abeliano.

(47) Probar que el subgrupo de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ generado por $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es no abeliano de orden 8 y es isomorfo a D_4.

(48) Sea p un número primo mayor que 2. Probar que

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,:\, a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\},$$

con el producto usual de matrices, es un grupo no abeliano tal que todo elemento distinto de la identidad tiene orden p. ¿Qué sucede si $p = 2$?

(49) Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,:\, a, b \in \mathbb{Z}_7,\ a \neq 0 \right\}$.

(a) Hallar el orden de G.

(b) Para cada primo p divisor del orden de G hallar todos los elementos de G de orden p.

(50) Probar el pequeño Teorema de Fermat: si $(a, p) = 1$, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.