PRÁCTICO 2

Subgrupos normales y cocientes.

(1) Considerar en $\mathbb{Q}$ la relación $a \sim b$ si $a - b \in \mathbb{Z}$.
   (a) Probar que es relación de congruencia en $\mathbb{Q}$.
   (b) Mostrar que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano infinito.
   (c) Probar que todos los elementos de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tienen orden finito.
   (d) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de orden n.

(2) Dado un grupo G se define el *centro* de G, $Z(G)$, por
$$Z(G) := \{a \in G : \ ab = ba \text{ para todo } b \in G\}.$$
   (a) Probar que $Z(G)$ es un subgrupo normal abeliano de G.
   (b) ¿Es $G/Z(G)$ abeliano?
   (c) Probar que si $f : G \to H$ es un epimomorfismo, entonces $f(Z(G)) \subseteq Z(H)$ y si f es un isomorfismo se da la igualdad.
   (d) ¿Es necesaria la hipótesis de ser el homomorfismo f un epimorfismo?

(3) Dado un grupo G se define el *conmutador*, $[G, G]$, o *derivado*, G', de G por
$$[G, G] = G' = \langle\{aba^{-1}b^{-1} : \ a, b \in G\}\rangle.$$
   (a) Probar que G' es un subgrupo normal de G.
   (b) ¿Es G/G' abeliano?
   (c) Probar que si $f : G \to H$ es un homomorfismo, entonces $f(G') \subseteq H'$ y si f es un isomorfismo se da la igualdad.

(4) Consideremos el grupo simétrico $\mathbb{S}_3$.
   (a) Si H es el subgrupo cíclico generado por (12), entonces ninguna coclase a izquierda de H (excepto la misma H) es también una coclase a derecha de H.
   (b) Si K es el subgrupo cíclico generado por (123), entonces toda coclase a izquierda de K es también una coclase a derecha de K.

(5) Sea G un grupo y H y K dos subgrupos de G. Se define $HK := \{hk : \ h \in H, k \in K\}$. Probar las siguientes afirmaciones.
   (a) $HK < G$ si y sólo si $HK = KH$.
   (b) Si G es abeliano, entonces $HK < G$.
   (c) Si H o K es normal en G, entonces $HK < G$.
   (d) Si H y K son normales, entonces $HK \lhd G$.

(6) Decir cuáles de los siguientes son subgrupos normales:
   (a) $H = \{1, R, R^2, R^3\} \hookrightarrow D_4$.
   (b) $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.
   (c) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

(7) Si G es abeliano, todo subgrupo es normal. Probar que el grupo $\mathcal{H}$ es un contraejemplo para la recíproca.

(8) Sean G un grupo y $N < G$. Si $[G : N] = 2$, entonces $N \lhd G$.

(9) Sea G un grupo y sea $\{N_i : \ i \in I\}$ una familia de subgrupos normales de G. Probar que $\cap_{i \in I} N_i \lhd G$.

(10) Sean G un grupo y H un subgrupo.
   (a) Probar que para todo $g \in G$, $gHg^{-1} < G$ y $gHg^{-1} \cong H$.
   (b) Si $|H| = n$ y es el único subgrupo de orden n en G, entonces $H \lhd G$.

(11) Hallar todos los subgrupos normales de D_n, distinguiendo los casos $n =$par y $n =$impar.

(12) Sean G_1 y G_2 dos grupos y N_1 y N_2 dos subgrupos normales de G_1 y G_2 respectivamente. Probar que:
   (a) $N_1 \times N_2 \lhd G_1 \times G_2$.

(b) $(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$.

(13) Calcular $n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

(14) Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Probar las siguientes afirmaciones.
 (a) Si $B \lhd H$, entonces $f^{-1}(B) \lhd G$.
 (b) Si f es epimorfismo y $A \lhd G$, entonces $f(A) \lhd H$. ¿Vale lo mismo si f no es epimorfismo?

(15) En cada caso determinar el índice $[G : H]$ y hallar un sistema de representantes de G módulo H.
 (a) $H = \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{R}$.
 (b) $H = \langle R \rangle$, $G = D_n$.
 (c) $H = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
 (d) $H = S^1$, $G = \mathbb{C}^\times$.

(16) Determinar todos los cocientes de $\mathbb{S}_3$, D_4 y $\mathcal{H}$.

(17) Para los siguientes pares (G, H) calcular el cociente G/H, proponiendo un grupo K tal que $G/H \simeq K$ y explicitando un isomorfismo.

$$(\mathbb{C}^\times, \mathbb{R}_{>0}); \quad (\mathbb{Q}^\times, \mathbb{Q}_{>0}); \quad (G_n, G_{kn}); \quad (S^1, G_n).$$

(18) Sea G un grupo. Dado $a \in G$ sea $I_a : G \to G$ la *conjugación por* a, definida por $I_a(g) = a.g.a^{-1}$.
 (a) Probar que I_a es un automorfismo de G. Estos automorfismos se llaman *interiores*.
 (b) Probar que la aplicación $I : G \to Aut(G)$, definida por $I(a) = I_a$, es un morfismo de grupos y verificar que $\mathrm{Ker}(I) = Z(G)$.
 (c) Probar que $\mathrm{Im}(I)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(G)$; usulamente se lo denota $\mathrm{Int}(G)$.
 (d) Deducir que $G/Z(G) \simeq \mathrm{Int}(G)$.

Ejercicios adicionales

(19) Probar que $\mathbb{Z}$ tiene sistemas de generadores minimales de n elementos, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(20) Calcular los subgrupos cerrados (topológicamente) de $(\mathbb{R}, +)$.

(21) Encontrar dos subgrupos H y K de D_4 tales que $H \lhd K$, $K \lhd D_4$ y H no normal en D_4.

(22) Sean $f : G \to G'$ un epimorfismo, $H \lhd G$ y $H' = f(H)$.
 (a) Probar que $H' \lhd G'$.
 (b) Si f es un isomorfismo, entonces $G/H \simeq G'/H'$.
 (c) Si $G \simeq G'$, $H \simeq H'$, $H \lhd G$ y $H' \lhd G'$, Â£es $G/H \simeq G'/H'$?

(23) Sean G un grupo finito y $f : G \to G$ un isomorfismo sin puntos fijos distintos de la identidad tal que $f^2 = \mathrm{Id}$. Entonces G es abeliano.

(24) Probar que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_{(m,n)}$.

(25) Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_4,\ (a, 4) = 1 \right\}$. Probar que G es un grupo no abeliano de orden 8. ¿Es G isomorfo a $\mathcal{H}$ o a D_4?

(26) Verificar que $H \lhd G$ y calcular el cociente G/H.
 (a) $G = \mathbb{S}_4$ y $H = \{\mathrm{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
 (b) $G = D_6$ y $H = \{\mathrm{Id}, R^3\}$.

(27) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
 (i) Si $|G| = p$, con p primo, entonces G es cíclico.
 (ii) Si $|G| = p^2$, con p primo, entonces G es cíclico.
 (iii) Si $|G| < \infty$ y $a^2 = e$, $\forall\, a \in G$, entonces $|G| = 2^n$.
 (iv) Si $H \lhd G$ y $K \lhd G$, entonces $H \vee K \lhd G$. (Nota: $H \vee K := \langle H \cup K \rangle$).
 (v) Sean G_1 y G_2 grupos, y $H_i \lhd G_i$, $i = 1, 2$.
  (i) Si $G_1 \cong G_2$ y $H_1 \cong H_2$, entonces $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$.
  (ii) Si $G_1 \cong G_2$ y $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$, entonces $H_1 \cong H_2$.
  (iii) Si $H_1 \cong H_2$ y $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$, entonces $G_1 \cong G_2$.

(28) Hallar pares de grupos G y K no isomorfos tales que $\mathrm{Aut}(G) \simeq \mathrm{Aut}(K)$.

(29) Sea G un grupo y sean H, K subgrupos normales de G. Sean π_H y π_K las proyecciones de G sobre G/H y G/K respectivamente. Probar que la aplicación $f : G/(H \cap K) \to G/H \times G/K$ definida por $f(x) = (\pi_H(x), \pi_K(x))$ es un monomorfismo.

(30) Sean $n, p, r \in \mathbb{N}$, con p primo. Sea $G = GL(n, p^r)$ y $g \in G$. Probar que

- g es p-unipotente si y sólo si los autovalores de g son todos 1 (i. e. $1-g$ es nilpotente).
- g es p-regular si y sólo si g es semisimple (i. e. g es diagonalizable).

(Ver Ejercicio (15) del Práctico 1 para las definiciones de elemento p-unipotente y elemento p-regular).