PRÁCTICO 3

Producto y suma directas de grupos.

(1) ¿Es $\mathbb{S}_3$ el producto directo de alguna familia de (sus) subgrupos propios? ¿Es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$?
(2) Dar un ejemplo de grupos H_i y K_j tales que $H_1 \times H_2 \cong K_1 \times K_2$ y H_i no es isomorfo a ningún K_j.
(3) Sea G un grupo abeliano.
   (a) Probar que para todo entero m, $mG = \{ma : \ a \in G\}$ es un subgrupo de G.
   (b) Si $G \simeq \sum_{i \in I} G_i$, entonces $mG \simeq \sum_{i \in I} mG_i$.
   (c) Si $G \simeq \sum_{i \in I} G_i$, entonces $G/mG \simeq \sum_{i \in I} G_i/mG_i$.
(4) Sean G y H grupos y $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ un homomorfismo de grupos. Definimos en el conjunto $G \times H$ la siguiente operación binaria

$$(g, h) \cdot (g', h') := (g \ \varphi(h)(g'), hh').$$

   (a) Probar que $(G \times H, \cdot)$ es un grupo.
   Este grupo se llama el *producto semidirecto de G y H* y se lo denota $G \times_\varphi H$, o también $G \rtimes H$.
   (b) Probar que $H \hookrightarrow G \rtimes H$ y que $G \lhd G \rtimes H$
   (c) Mostrar que $D_n \simeq \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Grupos libre, generadores y relaciones.

(5) Mostrar que el grupo definido por generadores a y b y relaciones:
   (a) $a^8 = b^2a^4 = ab^{-1}ab = e$, tiene orden ≤ 16.
   (b) $a^2 = e$, $b^3 = e$, es infinito y no abeliano.
(6) Sea G grupo y $H \lhd G$. Si H y G/H son finitamente generados, entonces G es finitamente generado.
(7) Sea G grupo. Si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.
(8) Todo elemento distinto de la identidad en un grupo libre tiene orden infinito.
(9) Muestre que el grupo libre sobre el conjunto $\{a\}$ es un grupo infinito cíclico, y por lo tanto isomorfo a $\mathbb{Z}$.
(10) Dar una presentación (X, Y) de $\mathbb{S}_n$ con $|X| = 2$.
(11) Caracterizar el grupo presentado en cada caso.
   (a) $\langle x \mid x \rangle$
   (b) $\langle x, y \mid x^2, y^4, xyxy \rangle$
   (c) $\langle x, y \mid x^n, xyx^{-1}y^{-1} \rangle$
(12) Probar que $\langle a, b \mid a^4, abab^{-1}, a^2b^{-2} \rangle$ es una presentación del grupo $\mathcal{H}$.

Grupos abelianos finitamente generados.

(13) Para cada uno de los siguientes grupos abelianos finitos dar sus divisores elementales y sus factores invariantes:
   (a) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{35}$.
   (b) $\mathbb{Z}_{26} \oplus \mathbb{Z}_{42} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}_{200} \oplus \mathbb{Z}_{1000}$.
(14) Mostrar que los factores invariantes de $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ son (m, n) y $[m, n]$ (el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de m y n) si $(m, n) > 1$, y mn si $(m, n) = 1$.
(15) Dar todos los grupos abelianos de orden 67.375, determinando en cada caso sus divisores elementales y sus factores invariantes.

(16) ¿Cuántos elementos de orden p^2 tiene el grupo $\mathbb{Z}_{p^3} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$?
(17) Probar que todo grupo abeliano finito, no cíclico, contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, para algún primo p.
(18) Sea G un grupo finito y x un elemento de orden maximal. Probar que $\langle x \rangle$ es un sumando directo de G.
(19) Probar que todo p-grupo abeliano finito, está generado por sus elementos de orden maximal.
(20) Un grupo abeliano libre, no trivial, tiene un subgrupo de índice n, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(21) Sea G el grupo multiplicativo generado por la matrices reales $a = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mostrar que el subgrupo H de G de matrices con 1 en la diagonal principal, no es finitamente generado (a pesar de que G sí es finitamente generado).
(22) Si H es un subgrupo de un grupo abeliano finito G, entonces G tiene un subgrupo isomorfo a G/H.
(23) Determinar la estructura del grupo abeliano generado por a, b, c con relaciones $3a + 9b + 9c = 9a - 3b + 9c = 0$.

Ejercicios adicionales

(24) Probar que $\mathbb{Z}_{p^n}$, para $n > 1$, no es el producto directo de alguna familia de (sus) subgrupos propios.
(25) Sean G grupo y $a \in G$, con $a \neq e_G$ y $|a| \neq 2$. Mostrar que existe un automorfismo distinto de la identidad.
(26) Sean F un grupo libre y $n \in \mathbb{Z}$. Probar que el subgrupo de F generado por el conjunto $\{w^n : w \in F\}$ es normal en F.
(27) Sean $H_1 \lhd G_1$ y $H_2 \lhd G_2$. Decir cuáles de las siguientes son verdaderas y cuáles falsas.
  (a) $G_1 \simeq G_2$ y $H_1 \simeq H_2$, entonces $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$.
  (b) $G_1 \simeq G_2$ y $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$, entonces $H_1 \simeq H_2$.
  (c) $H_1 \simeq H_2$ y $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$, entonces $G_1 \simeq G_2$.
(28) Caracterizar el grupo presentado en cada caso.
  (a) $\langle x, y \mid xyx^{-1}, y^{-1} \rangle$
  (b) $\langle x \mid x^n \rangle$
  (c) $\langle x, y \mid x^2, y^2, xyxyxyxy \rangle$
(29) Considerar las presentación $\langle a, b \mid a^7, b^3, a^{-1}b^{-1}a^r b \rangle$, para algún $1 \leq r \leq 6$.
  (a) Probar que el cardinal del grupo G presentado es menor ó igual a 21.
  (b) Probar que para $r \in \{3, 5, 6\}$ se tiene que $G \simeq \mathbb{Z}_3$.
  (c) Probar que para $r = 1$ se tiene que $G \simeq \mathbb{Z}_{21}$.
  (d) Probar que para $r \in \{2, 4\}$, G es un grupo no abeliano de orden 21.
(30) Sea F el grupo libre en X y sea $Y \subseteq X$. Si H es el menor subgrupo normal de F que contiene a Y, entonces F/H es libre.
(31) Decir V ó F.
  (a) El grupo generado por a, b con relaciones $a^2 = b^3 = aba^{-1}b^{-1} = 1$, es el grupo cíclico de 6 elementos.
  (b) El grupo generado por a, b con relaciones $a^2 = b^3 = 1$, es no abeliano de 6 elementos.
  (c) El grupo generado por a, b con relaciones $a^n = b^2 = abab = 1$, para $n \geq 3$, es el grupo dihedral D_n.
(32) Sea G un grupo finitamente generado.
  (a) Probar que si todos los elementos de G, salvo la identidad, tienen orden infinito, entonces G es abeliano libre.
  (b) Mostrar que la hipótesis de ser G finitamente generado el esencial. Para esto considerar G el grupo $\mathbb{Q}$ de números racionales (con la suma!).
(33) La suma directa de una familia de grupos abelianos libres, es un grupo abeliano libre.
(34) Probar que todos los subgrupos finitos de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, son cíclicos.

(35) En cada caso determinar la estructura del grupo abeliano presentado por generadores y relaciones:

(a) $\{a, b\}$, $\{2a + 4b, 3b\}$.

(b) $\{a, b, c, d\}$, $\{2a + 3b, 4a, 5c + 11d\}$.

(c) $\{a, b, c, d, e\}$, $\{a - 7b + 14d - 21c, 5a - 7b - 2c + 10d - 15e, 3a - 3b - 2c + 6d - 9e, a - b + 2d - 3e\}$.