PRÁCTICO 4

Acciones de grupos.

(1) Sean G grupo y $A \lhd G$, con A abeliano. Mostrar que G/A opera sobre A por conjugación y obtener un homomorfismo $f : G/A \to \mathrm{Aut}(A)$

(2) Sea G grupo. Supongamos que un elemento a de G tiene exactamente dos conjugados. Probar que G contiene un subgrupo normal propio.

(3) Si H es un subgrupo de un grupo G, entonces $N_G(H)/C_G(H)$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Aut}(H)$.

(4) Sea G grupo. Se dice que $f : G \to G$ es un automorfismo *interior* o *interno* si existe $g \in G$ tal que $f(x) = gxg^{-1}$, para todo $x \in G$. Se denota $\mathrm{Int}(G) := \{f \in \mathrm{Aut}(G) : f \text{ es interior}\}$. Probar que
  (a) $\mathrm{Int}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$.
  (b) $G/Z(G) \cong \mathrm{Int}(G)$.

(5) Mostrar que existe un automorfismo de $(\mathbb{Z}_6, +)$ que no es automorfismo interior.

(6) Probar que $Z(\mathbb{S}_n) = \{(1)\}$ e $\mathrm{Int}(\mathbb{S}_n) \cong \mathbb{S}_n$, para todo entero $n \geq 3$. Calcular $Z(\mathbb{S}_2)$ e $\mathrm{Int}(\mathbb{S}_2)$.

(7) En cada uno de los siguientes casos probar que $\cdot$ es una acción del grupo G en el conjunto X. En cada caso calcular $X^G = \{x \in X : g \cdot x = x \ \forall g \in G\}$, las órbitas O_x y los estabilizadores E_x de cada elemento de X.
  (a) $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f(x) = ax + b, \ a \in \mathbb{R}^\times, \ b \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}$ y $f \cdot x = f(x)$.
  (b) $G = \mathbb{R}^\times$, $X = \mathbb{R}_{>0}$ y $a \cdot x = x^a$.
  (c) $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y la acción dada por el producto de matrices.

(8) Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y sea $S \lhd G$. Determinar una condición suficiente y necesaria para que exista una acción de G/S en X tal que $\overline{a} \cdot x = a \cdot x$, para todo $a \in G$ y $x \in X$.

(9) Sea X un conjunto finito. Determinar el número de acciones de $\mathbb{Z}$ sobre X.

(10) Sea G un grupo.
  (a) Probar que si $|G| = p^n$ con p primo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $Z(G) \neq 1$.
  (b) Probar que si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.
  (c) Probar que si $|G| = p^2$ con p primo, entonces G es abeliano.
  (d) Caracterizar todos los grupos de orden p^2.
  (e) Dar un ejemplo de un grupo G no abeliano tal que $G/Z(G)$ sea abeliano.

(11) Sea p un primo.
  (a) Sea G un grupo no abeliano de orden p^3. Probar que $Z(G) = [G, G]$ y calcular $|Z(G)|$.
  (b) Calcular el conmutador del grupo $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$.

(12) Sea G un grupo, $|G| = pq$, $p > q$ primos tales que q no divide a $p - 1$. Probar que G es cíclico.

(13) Hallar un $\theta : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ tal que $\mathbb{S}_3 \simeq \mathbb{Z}_3 \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$.

(14) Mostrar que $\mathbb{S}_n$ es el producto semidirecto (interno) de $\mathbb{A}_n$ por $\langle (12) \rangle$.

(15) Determinar si existe un grupo K tal que G sea el producto semidirecto de $N \lhd K$ en cada uno de los siguientes casos.
  (a) $G = \mathbb{C}^\times$ y $N = S^1$.
  (b) $G = G_{12}$ y $N = G_2$.
  (c) $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ y $N = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

(16) Sean $G = \mathbb{Z}_3$ y $H = \mathbb{Z}_4$.
  (a) Describir todos los posibles productos semidirectos de G por H.
  (b) Mostrar que uno de éstos es no abeliano y no isomorfo a $\mathbb{A}_4$.

p-grupos y Teoremas de Sylow.

(17) Sea G un grupo.
  (a) Si $|G| = m$ y p es el menor primo que divide a m, entonces todo subgrupo de índice p es normal.
  (b) Supongamos que $|G| = pn$, con p primo y $p > n$. Si $H < G$, con $|H| = p$, entonces $H \lhd G$.
  (c) Si $|G| = p^n$, con p primo, y $N \lhd G$, con $|N| = p$, entonces $N \subseteq Z(G)$.

(18) Si $N \lhd G$, y N y G/N son p-grupos, entonces G es un p-grupo.

(19) ¿Es cierto que si G es un p-grupo entonces $|G| < \infty$?

(20) Sean G un p-grupo finito y H un subgrupo normal no trivial de G. Probar que $H \cap Z(G) \neq \{e\}$.

(21) Sean P un p-subgrupo de Sylow normal de un grupo finito G y $f \in \mathrm{End}(G)$. Probar que $f(P) < P$.

(22) Sea G un grupo finito. Si cada p-subgrupo de Sylow de G es normal para cada primo p, entonces G es el producto de sus subgrupos de Sylow.

(23) Si $|G| = p^n q$, con $p > q$ primos, entonces G contiene un único subgrupo normal de índice q.

(24) Cada grupo de orden 12, 28, 56 y 200 debe contener un subgrupo de Sylow normal, y por lo tanto no es simple.

(25) ¿Cuántos elementos de orden 7 existen en un grupo simple de orden 168?

(26) Sea G un grupo de orden p^3, con p primo.
  (a) Si G posee más de un subgrupo normal de orden p, entonces G es abeliano y no cíclico.
  (b) Si G es no abeliano, entonces $|Z(G)| = p$.

(27) ¿Cuántos subgrupos de orden p^2 tiene el grupo $\mathbb{Z}_{p^3} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$?

(28) Calcular todos los p-subgrupos de Sylow de:

$$Z_{12}, \quad Z_{21} \oplus Z_{15}, \quad \mathbb{S}_3 \times Z_3, \quad \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3.$$

(29) Sean p y q primos. Probar que ningún grupo G de orden $p^2 q$ es simple.

(30) Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes: 30, 36, 56, 96.

Ejercicios adicionales

(31) Sean G grupo y $K < G$. Mostrar que
  (a) $K \lhd N_G(K)$.
  (b) $K \lhd G$ si y sólo si $N_G(K) = G$.
  (c) $C_G(K) \lhd N_G(K)$.

(32) Sea $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Caracterizar la clase de conjugación $\mathbb{C}_\sigma$ y el centralizador $\mathbb{S}_n^\sigma$ de la permutación σ en $\mathbb{S}_n$. Determinar sus órdenes.

(33) Sea G un grupo tal que $|G| = 2n$, G tiene n elementos de orden 2 y los restantes forman un subgrupo H. Probar que entonces n es impar y $H \lhd G$.

(34) Determinar si existe un grupo K tal que G sea el producto semidirecto de $N \lhd K$ en cada uno de los siguientes casos.
  (a) $G = G_{12}$ y $N = G_3$.
  (b) $G = \mathbb{C}$ y $N = \mathbb{R}$.
  (c) $G = \mathbb{S}_4$ y $N = 1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)$.

(35) Sea G un p-grupo infinito. Probar que vale una de las siguientes dos:
  (a) G tiene un subgrupo de orden p^n, para cada $n \in \mathbb{N}$.
  (b) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que cada subgrupo finito tiene orden $\leq p^m$.

(36) Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes: 200, 204, 260, 2540.