PRÁCTICO 5

Anillos, homomorfismos e ideales.

(1) Probar que son anillos y decir si son ó no conmutativos, identificar la identidad si tienen y decir si tienen divisores de 0.
  (a) $(G, +, \cdot)$ donde $(G, +)$ es un grupo abeliano y $g \cdot h = 0$ para todo $g, h \in G$.
  (b) $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$, donde X es un conjunto arbitrario y Δ es la diferencia simétrica.
  (c) $M_n(A)$, con la suma y el producto de matrices, donde A es un anillo.
  (d) $A[X_1, \dots, X_n]$, los polinomios en n variables con coeficientes en el anillo A.
  (e) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,] = \{a + b\sqrt{d} : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$, con $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados, con la suma y el producto de números complejos. [Notar que d puede ser positivo ó negativo.]
  (f) $(\mathrm{Hom}(G, G), +, \circ)$, donde G es un grupo abeliano.
  (g) $\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{g\in G} a_g g : \ a_g \in \mathbb{Z}, \ a_g \neq 0$ sólo para finitos $g \in G\}$, con G un grupo y

$$\sum_{g\in G} a_g g + \sum_{g\in G} b_g g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g) g \qquad \text{y} \qquad \Big(\sum_{g\in G} a_g g\Big)\Big(\sum_{g\in G} b_g g\Big) = \sum_{g_1 g_2 = g} (a_{g_1} b_{g_2}) g.$$

(2) Dar ejemplos de:
  (a) Anillos sin identidad.
  (b) Anillos que no son dominios íntegros.
  (c) Dominios íntegros que no son anillos de división.
  (d) Anillos con identidad con subanillos sin identidad.
  (e) Anillos de división que no son cuerpos.

(3) Decir en cada caso si S es subanillo de R ó no, y en caso afirmativo decir si es ideal ó no.
  (a) $R = \mathbb{R}$ y $S = \mathbb{Z}$.
  (b) $R = \mathbb{Z}$ y $S = \mathbb{N}$.
  (c) $R = M_n(\mathbb{C})$ y $S = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
  (d) $R = M_n(\mathbb{Z})$ y $S = 2M_n(\mathbb{Z})$.
  (e) $R = \mathbb{C}$ y $S = \mathbb{Z}[i]$.
  (f) $R = \mathbb{Z}[x]$ y $S = \{p : \ p(0) = 0\}$.

(4) Un *anillo de Boole* es un anillo R tal que $a^2 = a$ para todo $a \in R$. Probar que todo anillo de Boole es conmutativo y $a + a = 0$ para todo $a \in R$. Identificar algún anillo de Boole entre los anillos del primer ejercicio.

(5) En cada caso, decir si f es homomorfismo de anillo ó no.
  (a) $f : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$, $f(p) = p(1)$.
  (b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$.
  (c) $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(A) = \det(A)$.
  (d) $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $f(a) = a^p$ (p primo).

(6) Sea R anillo finito con más de un elemento y sin divisores de cero. Probar que R es un anillo de división.

(7) Sea R un anillo con más de un elemento y supongamos que para todo $a \in R$, con $a \neq 0$, existe un único $b \in R$ tal que $aba = a$. Probar que:
  (a) R no tiene divisores de cero.
  (b) $bab = b$.
  (c) R tiene una identidad.
  (d) R es un anillo de división.

(8) Sea R un anillo con 1. Probar las siguientes afirmaciones:
  (a) Si $\mathrm{char}(R) = n > 0$, entonces $n = \min\{j \in \mathbb{N} : \ j.1_R = 0\}$.
  (b) Si R no tiene divisores de cero, entonces $\mathrm{char}(R)$ es primo.
  (c) ¿Existe un anillo de característica n, para todo $n \geq 2$?

(9) Sea R un anillo conmutativo y $a, b \in R$ elementos nilpotentes. Probar las siguientes afirmaciones:
   (a) Si R es conmutativo y $a, b \in R$ son nilpotentes, entonces $a + b$ es nilpotente.
   (b) La hipótesis de conmutatividad en el item anterior, es necesaria.
   (c) Si R tiene 1 y $r \in R$ es nilpotente, entonces $1 + r$ y $1 - r$ son unidades.

(10) Sea R un anillo. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (a) R no tiene elementos nilpotentes distintos de cero.
   (b) Si $a \in R$ y $a^2 = 0$, entonces $a = 0$.

(11) Sean R y S anillos con identidad y sea $f : R \to S$ un morfismo de anillos.
   (a) Mostrar que existen R, S y f tales que $f(1_R) \neq 1_S$.
   (b) Probar que si f es un epimorfismo, entonces $f(1_R) = 1_S$.
   (c) Probar que si u es una unidad en R tal que $f(u)$ es una unidad en S, entonces $f(1_R) = 1_S$ y $f(u^{-1}) = f(u)^{-1}$.

(12) Probar que los siguientes son ideales de R:
   (a) Si R es conmutativo, el conjunto de todos los elementos nilpotentes.
   (b) $J_a := \{r \in R : \ ra = 0\}$ es un ideal a izquierda.
   (c) $K_a := \{r \in R : \ ar = 0\}$ es un ideal a derecha.
   (d) Si I es un ideal, el conjunto $[R : I] := \{r \in R : \ xr \in I, \text{ para todo } x \in R\}$. Notar que contiene a I.

(13) Sea $S = M_n(R)$ el anillo de todas las matrices de $n \times n$ sobre un anillo R.
   (a) Si R es un cuerpo, los múltiplos de la identidad están en el centro de S.
   (b) Calcular el centro de S en el caso en que R es un cuerpo.
   (c) Mostrar que el centro de S no es un ideal en S.
   (d) Calcular el centro de S en el caso en que R es un anillo de división.

(14) Sea $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos, I un ideal de R y J un ideal de S.
   (a) Probar que $f^{-1}(J)$ es un ideal de R que contiene a $\ker f$.
   (b) Si f es epimorfismo, entonces $f(I)$ es un ideal en S. ¿Es esto cierto si f no es epimorfismo?

(15) Sea $f : R \to S$ un epimorfismo de anillos. Probar las siguientes afirmaciones.
   (a) Si P es ideal primo en R y $\ker f \subseteq P$, entonces $f(P)$ es un ideal primo en S.
   (b) Si Q es ideal primo en S, entonces $f^{-1}(Q)$ es un ideal primo en R y $\ker f \subseteq f^{-1}(Q)$.
   (c) Existe una correspondencia 1-1 entre el conjunto de todos los ideales primos en R que contienen a $\ker f$ y el conjunto de todos los ideales primos S, dada por $P \mapsto f(P)$.
   (d) Sea I un ideal (primo) en R. Cada ideal (primo) en R/I es de la forma J/I, donde J es un ideal (primo) en R que contiene a I.

(16) Sea I un ideal en $\mathbb{Z}$, con $I \neq 0$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
   (a) I es primo.
   (b) I es maximal.
   (c) $I = (p)$, con p primo.

(17) Determinar todos los subanillos primos y todos los subanillos maximales en $\mathbb{Z}_m$.

(18) Calcular las unidades de:
   (a) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
   (b) $\mathbb{Z}_{10}$.
   (c) $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_4]$.

Ejercicios adicionales

(19) Sean R un anillo y S un subanillo. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
   (a) Si R es dominio íntegro, S es dominio íntegro.
   (b) Si S es dominio íntegro, R es dominio íntegro.
   (c) Si R es cuerpo, S es cuerpo.
   (d) Si S es cuerpo, R es cuerpo.
   (e) Si R es conmutativo con 1, S es conmutativo con 1.

(f) Si S es conmutativo con 1, R es conmutativo con 1.

(20) Sea R un anillo con identidad y $\mathrm{char}(R) = p$, con p primo. Probar que $(a \pm b)^{p^n} = a^{p^n} \pm b^{p^n}$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a, b \in R$.

(21) Sea R un anillo conmutativo y N el ideal de todos los elementos nilpotentes. Demostrar que R/N es un anillo sin elementos nilpotentes no nulos.

(22) Sea R un anillo conmutativo con identidad y sea $A := \{r \in R : \ r \text{ es divisor de cero}\} \cup \{0\}$. Probar que A contiene al menos un ideal primo.

(23) Sean R un anillo conmutativo con identidad y M un ideal en R, con $M \neq R$. Probar que M es maximal si y sólo si para todo $r \in R - M$ existe $x \in R$ tal que $1_R - rx \in M$.

(24) Dado un anillo R, el *grupo de unidades* de R es el conjunto

$$R^* = \{r \in R : \ r \text{ es unidad } \}.$$

(a) Probar que R^* es un grupo con la multiplicación de R.
(b) Probar que $\mathcal{U}_n = \mathbb{Z}_n^* = \{m \in \mathbb{Z}_n : \ (m, n) = 1\}$.
(c) Deducir que $\mathbb{Z}_n$ es cuerpo si y sólo si n es primo.
(d) Calcular $\mathcal{U}_n$ para $n = 2, \ldots, 10$.
(e) Averiguar si se conoce la estructura de $\mathcal{U}_n$ para todo n ó no.