PRÁCTICO 7

Módulos, submódulos y homomorfismos.

Notación: $\Bbbk$ denotará un cuerpo.

(1) En cada caso mostrar que M es un R módulo con la acción dada por ϕ y describir los submódulos de M.
   (a) $M = G$ un grupo abeliano, $R = \mathbb{Z}$ y
$$\phi(n, g) = \underbrace{g + \cdots + g}_{n\text{-veces}}.$$
   (b) $M = V$, $\Bbbk$-espacio vectorial, $R = \Bbbk$ y
$$\phi(\lambda, v) = \lambda v.$$
   (c) $M = V$ un $\Bbbk$-espacio vectorial y T una transformación lineal de V en V, $R = \Bbbk[x]$ y
$$\phi(p(x), v) = p(T)v.$$

(2) Sea R un anillo, S un subanillo e I un ideal de R.
   (a) Mostrar que R es un S-módulo a izquierda con la acción dada por multiplicación a izquierda $s \cdot r = sr$, para todo $s \in S$, $r \in R$.
   (b) Mostrar que I es un R-submódulo de R y es un S-módulo a izquierda con la multiplicación a izquierda de R.
   (c) Mostrar que R/I es un R-módulo con acción dada por
$$r \cdot (a + I) = ra + I,$$
   y luego también es un S-módulo.

(3) Sea $\varphi : R \to S$ un homomorfismo de anillos. Probar que si M es un S-módulo, entonces M es un R-módulo con la acción dada por
$$r \cdot x := \varphi(r)x.$$
Decimos que la estructura de R-módulo de M está dada por el *pullback a lo largo de* φ.

(4) Sea A un grupo abeliano y $\mathrm{End}(A)$ su anillo de endomorfismos. Mostrar que A tiene estructura de $\mathrm{End}(A)$-módulo unitario con la acción dada por la evaluación: $f \cdot a = f(a)$.

(5) Probar los tres teoremas de isomorfismo para módulos.

(6) Sea M un R-módulo y $f : M \to M$ un homomorfismo de R-módulos tal que $f \circ f = f$. Probar que $M = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

(7) Sean R anillo y M un R-módulo. Probar que:
   (a) Si I es un ideal a izquierda de R y $S \subseteq M$, $S \neq \emptyset$, entonces $IS = \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \,|\, r_i \in I, x_i \in S, n \in \mathbb{N}\}$ es un submódulo de M.
   (b) Si I es un ideal de R, entonces M/IM es un R/I-módulo con $(r + I) \cdot (x + IM) = rx + IM$.

(8) Sea R un anillo con identidad. Probar que todo R-módulo cíclico unitario es isomorfo a un R-módulo de la forma R/J, donde J es un ideal a izquierda de R.

(9) Dados un anillo conmutativo R, un R-módulo a izquierda M y un R-módulo a derecha N, sean:
$$\mathrm{Hom}_R(M, M) = \{f : M \to M \,|\, f \text{ es homomorfismo de } R\text{-módulos a izquierda}\},$$
$$\mathrm{Hom}_R(N, N) = \{f : N \to N \,|\, f \text{ es homomorfismo de } R\text{-módulos a derecha}\}.$$
Probar que:
   (a) $\mathrm{Hom}_R(M, M)$ tiene estructura de R-módulo a derecha con $(f \cdot r)(x) = f(r \cdot x)$.
   (b) $\mathrm{Hom}_R(N, N)$ tiene estructura de R-módulo a izquierda con $(r \cdot f)(y) = f(y \cdot r)$.
¿Qué pasa si no se pide que R sea conmutativo?

(10) Probar que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$.

(11) Un R-módulo M se dice *simple* si $M \neq 0$ y sus únicos submódulos son 0 y M. Sea $f : M \to N$ un morfismo de R-módulos, $f \neq 0$. Probar que:
  (a) Si M es simple, f es un monomorfismo.
  (b) Si N es simple, f es un epimorfismo.
  (c) Si M y N son simples, f es un isomorfismo.
  (d) Si M es simple, $\mathrm{End}_R(M)$ es un anillo de división.

(12) Sea $f : M \to N$ un morfismo de R-módulos. Probar que:
  (a) f es una sección si y sólo si f es un monomorfismo e $\mathrm{Im}(f)$ es un sumando directo de N.
  (b) f es retracción si y sólo si f es un epimorfismo y $\mathrm{Ker}(f)$ es un sumando directo de M.

Módulos libres, proyectivos e inyectivos.

(13) Sea R un anillo de división y sea V un R-módulo.
  (a) Probar que $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V$ en un conjunto linealmente dependiente si y sólo si existe k, con $1 \leq k \leq n$, tal que x_k es combinación lineal de los x_i precedentes.
  (b) Probar que si $\mathrm{car}(R) \neq 2$ y n es impar, entonces $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V$ es linealmente independiente si y sólo si $\{x_1 + x_2, x_2 + x_3, \ldots, x_n + x_1\} \subseteq V$ es linealmente independiente.
  (c) Probar que si $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V$ es linealmente independiente, entonces $\{x_1 + x_2, x_2 + x_3, \ldots, x_n + x_1\} \subseteq V$ es linealmente independiente si y sólo si la característica de R es distinta de 2.

(14) Sean R un anillo conmutativo con identidad y M un R-módulo unitario. Probar que existe un R-módulo libre F y un submódulo K de F tal que $F/K \cong M$. Mostrar que si M está generado por n elementos, entonces se puede elegir F finitamente generado.

(15) Sean R, S y T cuerpos tales que $R \subset S \subset T$.
  (a) Probar que $\dim_R T = \dim_S T \, \dim_R S$.
  (b) Deducir que no existe un cuerpo $\Bbbk$, con $\mathbb{R} \subsetneq \Bbbk \subsetneq \mathbb{C}$.

(16) Sean R un anillo con identidad, F un módulo libre sobre R y $n \in \mathbb{N}$. Probar que si F tiene una base de cardinalidad n y otra base de cardinalidad de $n+1$, entonces F tiene una base de cardinalidad m, para todo $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq n$.

(17) Sea R un anillo conmutativo con identidad tal que cada submódulo de cada R-módulo libre es libre. Probar que R es DIP.

(18) Sea P un R-módulo y consideremos el funtor $\mathrm{Hom}(P,-)$ de la categoría de R-módulos a la categoría de grupos abelianos.
  (a) Probar que $\mathrm{Hom}(P,-)$ es exacto a izquierda.
  (b) Probar que $\mathrm{Hom}(P,-)$ es exacto (exacto a derecha) si y sólo si P es R-proyectivo.

(19) Sea I un R-módulo y consideremos el funtor $\mathrm{Hom}(-,I)$ de la categoría de R-módulos a la categoría de grupos abelianos.
  (a) Probar que $\mathrm{Hom}(-,I)$ es exacto a derecha.
  (b) Probar que $\mathrm{Hom}(-,I)$ es exacto (exacto a izquierda) si y sólo si I es R-inyectivo.

(20) Sea M un R-módulo no nulo finitamente generado. Probar que:
  (a) Si S es un sistema de generadores de M, entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in S$ tales que $M = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.
  (b) Todo submódulo propio está contenido en un submódulo maximal.

Ejercicios adicionales

(21) Sea R un DIP, M un R-módulo unitario y $p \in R$ elemento primo. Sean $pM := \{px \mid x \in M\}$ y $M[p] := \{x \in M \mid px = 0\}$. Probar que:
  (i) $R/(p)$ es un cuerpo.
  (ii) pM y $M[p]$ son submódulos de M.
  (iii) M/pM es un espacio vectorial sobre $R/(p)$ con $(r + (p)) \cdot (x + pM) = rx + pM$.
  (iv) $M[p]$ es un espacio vectorial sobre $R/(p)$ con $(r + (p)) \cdot x = rx$.

(22) Sea R anillo. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
  (i) Si M es un R-módulo, entonces existe $\operatorname{rg}_R M$.
  (ii) Si S es subanillo de R y existe $\operatorname{rg}_R M$, entonces existe $\operatorname{rg}_S M$ y $\operatorname{rg}_R M \leq \operatorname{rg}_S M$.
  (ii) Si S es subanillo de R y existen $\operatorname{rg}_R M$ y $\operatorname{rg}_S M$, entonces $\operatorname{rg}_R M \leq \operatorname{rg}_S M$.
  (iii) Si M es un R-módulo, N es un R-submódulo y existe $\operatorname{rg}_R M$, entonces existe $\operatorname{rg}_R N$ y $\operatorname{rg}_R N \leq \operatorname{rg}_R M$.
  (iv) Si M es un R-módulo, N es un R-submódulo y existen $\operatorname{rg}_R M$ y $\operatorname{rg}_R N$, entonces $\operatorname{rg}_R N \leq \operatorname{rg}_R M$.

(23) Sean M, M' y M'' R-módulos dados y consideremos la sucesión
$$M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0.$$
  (a) Probar que esta es exacta si y sólo si para todo R-módulo N la sucesión
$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}(M', N) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}(M, N)$$
  es exacta.
  (b) Deducir que un morfismo $f : M \longrightarrow M'$ es isomorfismos si y sólo si
$$f^* : \operatorname{Hom}(M', N) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, N)$$
  es un isomorfismo para todo módulo N.

(24) Sea M un R-módulo y sea $S \subseteq M$ un subconjunto. Se define el anulador de S como $\operatorname{Ann}(S) = \{a \in R : \ as = 0 \, \forall s \in S\}$. Probar que:
  (a) $\operatorname{Ann}(S)$ es un ideal a izquierda de R.
  (b) $\operatorname{Ann}(S) = R$ si y sólo si $S \subseteq \{0\}$.
  (c) Si $S \subseteq T$, entonces $\operatorname{Ann}(S) \supseteq \operatorname{Ann}(T)$.

(25) Sea $M = \mathbb{Z}_n$ y consideremos a M como R-módulo donde $R = \mathbb{Z}$ ó $R = \mathbb{Z}_{kn}$ con $k \in \mathbb{N}$.
  (a) Probar que el dual de M como $\mathbb{Z}$-módulo es trivial: $\mathbb{Z}_n^* = 0$.
  (b) Probar que como $\mathbb{Z}_{kn}$-módulos, $\mathbb{Z}_n^* \cong \mathbb{Z}_n$.

(26) Decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.
  (a) $\mathbb{Q}$ es libre como $\mathbb{Z}$-módulo.
  (b) $\mathbb{R}$ es libre como $\mathbb{Q}$-módulo.
  (c) La suma directa de dos módulos libres, es libre.
  (d) Los submódulos de un módulo libre, son libres.
  (e) Los cocientes de un módulo libre, son libres.
  (f) Todo módulo cíclico, es libre.

(27) Dados A un anillo conmutativo y M un A-módulo, el dual de M es el A-módulo $M^* = \operatorname{Hom}_A(M, A)$. Probar que la aplicación $e : M \to (M^*)^*$ definida por $e(x)(f) = f(x)$ es un morfismo de A-módulos y que $\operatorname{Ker} e = \cap_{f \in M^*} \operatorname{Ker} f$.

(28) Caracterizar en cada caso el cociente M/N.
  (a) $M = A^n$ y $N = \{(a_1, \ldots, a_n) \in M : \ a_1 + \cdots + a_n = 0\}$.
  (b) $M = A[x]$ y $N = \{p \in M : \ p(1) = 0\}$.
  (c) $M = M_n(A)$ y $N = \{X \in M : \ x_{ii} = 0 \ \forall 1 \leq i \leq n\}$.
  (d) $M = L^I$ donde L es un A-módulo y $N = \{x \in M : \ x_i = 0 \ \forall i \in J\}$ donde $J \subseteq I$ es un subconjunto.