ÁLGEBRA III - 2019
Práctico 1

Repaso de Álgebra Lineal

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que su matriz en la base ordenada
$$\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,-1)\}$$
es
$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   (a) Sea $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar la matriz $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
   (b) Dar la matriz $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ de T en la base canónica.
   (c) Hallar $T(3,7,-5)$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por
$$T(x_1,x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 - 3x_2, 2x_2 - 3x_1).$$
   (a) Considerar en $\mathbb{R}^2$ la base canónica y en $\mathbb{R}^3$ la misma base ordenada $\mathcal{B}$ que en el ejercicio anterior. Hallar la matriz de T en dichas bases.
   (b) ¿Es T sobreyectiva?

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar.
   (a) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que la dimensión del núcleo es igual a la dimensión de la imagen.
   (b) El conjunto $\{A \in M_2(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(A) = 0\}$ es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.
   (c) Existe una base $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ del espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$ de matrices 2×2, con $\operatorname{tr}(A_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, 4$.
   (d) El conjunto $\{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^2 = 0\}$ es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.
   (e) Existe una base $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ del espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$ de matrices 2×2, con $A_i^2 = 0$ para todo $i = 1, \ldots, 4$.

4. Sea V el espacio vectorial de los polinomios en $\mathbb{R}[x]$ de grado ≤ 2, y sean t_1, t_2, t_3 tres números reales distintos.
   (a) Calcular la dimensión de V.
   (b) Definimos $L_1, L_2, L_3 : V \to \mathbb{R}$ por $L_i(p) = p(t_i)$. Probar que L_1, L_2, L_3 son funcionales lineales y que son linealmente independientes. Más aún, probar que son base de V^*.
   (c) Hallar una base $\{p_1, p_2, p_3\}$ de V tal que $\{L_1, L_2, L_3\} \subset V^*$ sea su base dual.
   (d) Escribir cualquier polinomio $p \in V$ en términos de la base $\{p_1, p_2, p_3\}$.

5. Repetir los ítems (b), (c) y (d) del ejercicio anterior para los funcionales:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f_3(p) = \int_0^{-1} p(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. Sea V el espacio vectorial de los polinomios en $\mathbb{R}[x]$ de grado ≤ 2 y $D : V \to V$ el operador diferenciación (formal) sobre V, $D(p) = p'$.

   Sea f la funcional lineal sobre V dada por $f(p) = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$, con $a < b$ fijos. Hallar $D^t f$.

7. Una matriz $n \times n$ se dice *triangular* si $A_{ij} = 0$ para todo $i > j$ o si $A_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

   Demostrar que si A es triangular entonces $\det A = A_{11}A_{22}\cdots A_{nn}$, donde los A_{ii} son los elementos de la diagonal de A.

8. Sean $\mathbb{F}$ un cuerpo y $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Demostrar que:

   (a) si A es antisimétrica ($A^t = -A$), n es impar y $\operatorname{car}\mathbb{F} \neq 2$, entonces $\det A = 0$;

   (b) si A es ortogonal ($AA^t = I$), entonces $\det A = \pm 1$;

   (c) si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y A es unitaria ($A^*A = I$, donde A^* denota la *transpuesta conjugada* $\bar{A}^t$ de A), entonces $|\det A| = 1$.

9. Sean $V = \mathbb{F}^{n\times n}$ el espacio vectorial de las matrices $n \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Consideremos L_B y R_B los operadores lineales sobre V definidos por $L_B(A) := BA$ y $R_B(A) := AB$. Demostrar que:

   (a) $\det L_B = (\det B)^n$.

   (b) $\det R_B = (\det B)^n$.