ÁLGEBRA III - 2019
Práctico 2

Polinomios

1. Hallar el cociente y el resto que se obtienen al dividir f por g en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1, \qquad g(x) = 2x^2 + 6x + 8;$
   b) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad g(x) = x - 1.$
   c) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1\ , \qquad g(x) = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 2x^2 + x + 8;$
   d) $f(x) = x^2 + x + 1, \quad g(x) = -5.$

2. Sea $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{R}[x]$. Probar que si $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de f entonces $\overline{z}$, el *conjugado de* z, también es raíz de f.
   (*Ayuda:* Recordar que en $\mathbb{C}$ se cumplen $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$ y $\overline{0} = 0$.)

3. Sea $\mathbb{Q}$ el cuerpo de los números racionales. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Q}[x]$ son ideales. Cuando el conjunto sea un ideal, encontrar su generador mónico.

   a) Todos los $f \in \mathbb{Q}[x]$ de grado par.
   b) Todos los $f \in \mathbb{Q}[x]$ de grado ≥ 5.
   c) Todos los $f \in \mathbb{Q}[x]$ tales que $f(0) = 0$.
   d) Todos los $f \in \mathbb{Q}[x]$ tales que $f(2) = f(4) = 0$.

4. Sea A una matriz $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Demostrar que el conjunto de todos los polinomios f en $\mathbb{F}[x]$, tales que $f(A) = 0$ es un ideal en $\mathbb{F}[x]$.

5. Encontrar el generador mónico del ideal $\{f \in \mathbb{C}[x] : f(A) = 0\}$, donde
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo. Demostrar que la intersección de cualquier número de ideales en $\mathbb{F}[x]$ es un ideal.

7. Si f y g son polinomios sobre el cuerpo de los números complejos, entonces el m.c.d.$(f, g) = 1$ si, y sólo si, f y g no tienen raíces en común.

8. Si p es un polinomio irreducible y p divide a fg, demostrar que p divide a f o a g. Dar un ejemplo que muestre que esto es falso si p no es irreducible.

9. Sea A la matriz 2×2 sobre $\mathbb{C}$ dada por $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3i \end{bmatrix}$. Calcular $f(A)$ para los siguientes polinomios:

   a) $f(x) = x^2 - x + 2.$
   b) $f(x) = x^2 - 5x + 7.$

10. Factorizar los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[x]$, en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$.

    a) $f(x) = x^2 + 1.$
    b) $f(x) = x^3 - 1.$
    c) $f(x) = x^6 - 1.$
    d) $f(x) = x^4 + x^2 + 1.$