ÁLGEBRA III - 2019
Práctico 4

Subespacios invariantes. Triangulación y diagonalización simultánea.

1. Sea T el operador lineal en $\mathbb{R}^2$, cuya matriz en la base canónica es $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.
   (a) Probar que los únicos subespacios T-invariantes de $\mathbb{R}^2$ son $\mathbb{R}^2$ y el subespacio nulo.
   (b) Sea U la tranformación lineal sobre $\mathbb{C}^2$, tal que la matriz de U en la base canónica es A. Probar que existe un subespacio U-invariante de dimensión 1.
2. Sea W un subespacio invariante por T. Demostrar, sin usar matrices, que el polinomio minimal para el operador restricción T_W divide al polinomio minimal de T.
3. Sea c un autovalor de T y sea W el autoespacio asociado a c. Decir cómo es el operador restricción T_W.
4. Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{smallmatrix}\right) \in M_3(\mathbb{R})$.
   (a) ¿Es A semejante sobre $\mathbb{R}$ a una matriz triangular? Si es así hallar tal matriz.
   (b) ¿Es A semejante a una matriz diagonal?
5. Probar que toda matriz A tal que $A^2 = A$ es semejante a una matriz diagonal.
6. Sea T un operador lineal diagonalizable sobre un espacio vectorial de dimensión finita V y sea W un subespacio T-invariante. Probar que la restricción T_W es diagonalizable.
7. Sea T un operador lineal en V tal que todo subespacio de V es T-invariante. Probar que T es un múltiplo de la identidad.
8. Sea T el operador del espacio de funciones continuas del $[0, 1]$ dado por
   $$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$
   Decir si los siguientes subespacios son invariantes por T:
   (a) el espacio de funciones polinomiales;
   (b) el espacio de funciones diferenciables;
   (c) el espacio de funciones que se anulan en $x = \frac{1}{2}$.
9. Sea A una matriz real 3×3. Probar que si A no es semejante sobre $\mathbb{R}$ a una matriz triangular entonces A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$.
10. Dadas dos matrices $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, decidir si existe una matriz real inversible P tal que $P^{-1}AP$ y $P^{-1}BP$ sean ambas diagonales y en caso afirmativo encontrar P:
    (a) $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\quad B = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -8 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
    (b) $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\quad B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

11. Verdadero o falso. Justificar.

    (a) Si una matriz compleja A satisface que $A^k = I$ para algún $k > 0$, entonces A es semejante sobre $\mathbb{C}$ a una matriz diagonal.

    (b) Si una matriz triangular A es semejante a una matriz diagonal entonces A es diagonal.

12. Sea T un operador lineal de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V de dimensión n. Supongamos que T tiene n autovalores distintos. Demostrar que todo operador lineal que conmuta con T es un polinomio en T. Es decir, si $S \in L(V)$ y $TS = ST$ entonces $S = p(T)$ para algún $p(x) \in F[x]$.

13. * Sea $\mathcal{F}$ una familia de matrices complejas 3×3 que conmutan entre sí. ¿Cuántas matrices linealmentes independientes puede tener $\mathcal{F}$?

14. Seas $\mathbb{F}$ un cuerpo cualquiera y $n \in \mathbb{N}$. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

    (a) Existe al menos una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$ tal que su polinomio minimal es 0.

    (b) Existe al menos una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$ tal que su polinomio minimal es 1.

    (c) Existe al menos una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$ tal que su polinomio minimal es x.

    (d) Existe al menos una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$ tal que su polinomio minimal es x^2.

    (e) Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con $\dim V = n$ y sean T_1 y T_2 dos operadores lineales sobre V tales que sus respectivos conjuntos de autovalores son disjuntos. Entonces para cada par $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[x]$ existe un polinomio g tal que $g(T_1) = f_1(T_1)$ y $g(T_2) = f_2(T_2)$.