

ÁLGEBRA III - 2019
Práctico 5

Descomposición en sumas directas invariantes. Descomposición primaria.

1. Encontrar una proyección E que proyecte \mathbb{R}^2 sobre el subespacio generado por $(1, -1)$ según el subespacio generado por $(1, 2)$, es decir según $\ker E = \langle (1, 2) \rangle$.
2. Si N y R son subespacios de V y E es la proyección sobre R según N , entonces $I - E$ es la proyección sobre N según R .
3. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{F} . Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
 - (a) Si E_1 y E_2 son proyecciones sobre subespacios independientes, entonces $E_1 + E_2$ es una proyección.
 - (b) Si $T \in L(V)$ es diagonalizable y sus únicos autovalores son 0 y 1, entonces T es una proyección.
4. Sea \mathbb{F} un cuerpo, con $\text{car } \mathbb{F} = 0$. Probar que si E_1, \dots, E_k son proyecciones de un \mathbb{F} -espacio vectorial tales que $E_1 + \dots + E_k = I$, entonces $E_i E_j = 0$ para todo $i \neq j$.
5. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial y $E \in L(V)$ idempotente. Probar que $I + E$ es inversible y hallar su inversa
6. Sea T el operador lineal en \mathbb{R}^2 cuya matriz en la base canónica es $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sea W_1 el subespacio generado por $e_1 = (1, 0)$. Probar que:
 - (a) W_1 es T -invariante.
 - (b) No existe ningún subespacio W_2 complementario a W_1 que sea T -invariante.
7. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita V . Sea R la imagen de T y N el núcleo de T . Probar que R y N son independientes si y sólo si $V = R \oplus N$.
8. Sea T un operador lineal en V . Supongamos $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, donde cada W_j es T -invariante. Para cada j , $1 \leq j \leq k$, sea T_j el operador restricción a W_j .
 - (a) Probar que $\det(T) = \det(T_1) \cdots \det(T_k)$.
 - (b) Probar que el polinomio característico de T es el producto de los polinomios característicos de T_1, \dots, T_k , es decir $p_T = p_{T_1} \cdots p_{T_k}$.
 - (c) Probar que el polinomio minimal de T es el mínimo común múltiplo de los polinomios minimales de T_1, \dots, T_k , es decir $m_T = m.c.m.\{m_{T_1}, \dots, m_{T_k}\}$.
9. Sea T el operador lineal sobre \mathbb{R}^3 representado en la base canónica por

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

y sean W_1, W_2 los autoespacios de T . Hallar las proyecciones E_1 y E_2 asociadas a la descomposición $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ y escribir $T = c_1 E_1 + c_2 E_2$.

10. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar las matrices E_1, E_2, E_3 tales $A = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, $E_1 + E_2 + E_3 = I$ y $E_iE_j = 0$, si $i \neq j$.

11. Sea T el operador lineal sobre \mathbb{R}^3 representado en la base canónica por

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Expresar el polinomio minimal m_T de T en la forma p_1p_2 , donde p_1 y p_2 son polinomios mónicos irreducibles sobre los números reales.
 - Sea $W_i = \ker(p_i(T))$ y T_i el operador restricción de T a W_i . Encontrar una base \mathcal{B}_i del espacio W_i y la matriz de T_i en esa base.
 - Hallar la matriz de T en la base $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.
12. Sea V el espacio de los polinomios de grado menor o igual que n sobre un cuerpo \mathbb{F} . Probar que el operador derivación es nilpotente.
13. Sea T un operador nilpotente en un espacio de dimensión finita n . Probar que el polinomio característico de T es x^n .
14. Sea T el operador sobre \mathbb{R}^3 representado en la base canónica por la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Demostrar que existen un operador diagonalizable D y uno nilpotente N sobre \mathbb{R}^3 tales que $T = D + N$ y $DN = ND$. [**Ayuda:**

 - Descomponer el polinomio minimal m_T de T en factores coprimos p_1, p_2 y hallar polinomios h_1, h_2 tales que $1 = p_1h_1 + p_2h_2$.
 - Sean $E_1 = p_2h_2(T)$, $E_2 = p_1h_1(T)$. Mostrar que $D = c_1E_1 + c_2E_2$ y $N = T - D$ satisfacen lo requerido.
 - Mostrar que E_i es la proyección al subespacio $W_i = \ker(p_i(T))$.
 - Hallar las matrices de D y N en la base canónica.
15. Sea T un operador sobre V con polinomio característico $p_T = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$ y polinomio minimal $m_T = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$. Sea $W_i := \ker((T - c_iI)^{r_i})$.
- Probar que W_i es el conjunto de todos los vectores $v \in V$ tales que $(T - c_iI)^\ell v = 0$ para algún natural ℓ (que dependerá de cada $v \in W_i$).
 - Mostrar que $(T - c_iI)$ es nilpotente en W_i . Si $n_i := \dim W_i$, entonces ¿cuál es el polinomio característico de $(T - c_iI)|_{W_i}$ (usar el Ejercicio 13) y cuál el de $T|_{W_i}$?
 - Usar el Ejercicio 8 (b) para mostrar que $\dim W_i = d_i$.

16. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre \mathbb{C} . Sea T un operador lineal en V y sea D la parte diagonalizable de T . Probar que si g es un polinomio sobre \mathbb{C} , entonces la parte diagonalizable de $g(T)$ es $g(D)$.
17. Sea T un operador lineal sobre V que conmuta con todo operador lineal diagonalizable. Probar que T es un múltiplo escalar del operador identidad.
18. Dar un ejemplo de dos matrices nilpotentes 4×4 que tengan el mismo polinomio minimal (por lo tanto, el mismo polinomio característico) pero que no sean semejantes.
19. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V de dimension finita. Sea $m_T = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ el polinomio minimal de T y $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ la descomposición primaria de T , i. e. $W_i = \ker(p_i^{e_i}(T))$. Probar que si W es un subespacio T -invariante de V , entonces

$$W = (W \cap W_1) \oplus (W \cap W_2) \dots \oplus (W \cap W_k).$$