ÁLGEBRA III - 2019
Práctico 6

Forma racional y forma de Jordan de un operador lineal.

1. Sea T un operador lineal en $\mathbb{F}^2$. Probar que todo vector no nulo que no sea un vector propio de T, es un vector cíclico de T. Concluir que o bien T tiene un vector cíclico o bien T es un múltiplo escalar de la identidad.

2. Sea T el operador lineal de $\mathbb{R}^3$ representado en la base canónica por la matriz
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Probar que T no tiene vectores cíclicos. ¿Cuál es el subespacio T-cíclico generado por el vector $(1,-1,3)$? Hallar el T-anulador del vector $(1,-1,3)$.

3. Sea T el operador lineal de $\mathbb{C}^3$ representado en la base canónica por la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & 2 & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Hallar el T-anulador del vector $\alpha = (1,0,0)$ y del vector $\alpha' = (1,0,i)$.

4. Probar que si T^2 tiene un vector cíclico, entonces T tiene un vector cíclico. ¿Es cierta la recíproca?

5. Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión n, y sea N un operador lineal nilpotente sobre V. Supongamos que $N^{n-1} \neq 0$, y sea $\alpha \in V$ tal que $N^{n-1}\alpha \neq 0$. Probar que α es un vector cíclico de N. Dar la matriz de N en la base ordenada $\{\alpha, N\alpha, \cdots, N^{n-1}\alpha\}$.

6. Sea T un operador diagonalizable sobre un espacio vectorial de dimensión n.
   (a) Probar que si T tiene un vector cíclico, entonces T tiene n autovalores distintos.
   (b) Supongamos que T tiene n autovalores distintos y que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de autovectores de T. Probar que $v = v_1 + \cdots + v_n$ es un vector cíclico de T.

7. Encontrar el polinomio minimal y la forma racional de cada una de las siguientes matrices reales.
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c & 0 & -1 \\ 0 & c & 1 \\ -1 & 1 & c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

8. Sea T el operador lineal de $\mathbb{R}^3$ representado en la base canónica por la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$
Hallar vectores no nulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ que satisfacen las condiciones del *Teorema de descomposición cíclica*. Hallar una matriz real P inversible tal que $P^{-1}AP$ esté en forma racional.

9. Sea A la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$. Hallar una matriz real P inversible tal que $P^{-1}AP$ esté en forma racional.

10. Sea T un operador lineal, con polinomio característico $f(x) = (x^2+1)(x-1)^3$. Dar todas las posibles formas racionales de T.

11. Clasificar por semejanza todas las matrices $A \in M_5(\mathbb{R})$ tales que
$$(A^2 + I)(A - I) = 0.$$

12. Probar que si $A, B \in M_3(\mathbb{F})$, con $\mathbb{F}$ cuerpo, una condición necesaria y suficiente para que A y B sean semejantes es que tengan el mismo polinomio característico y el mismo polinomio minimal. ¿Es esto cierto para matrices 4×4?

13. Sea A una matriz $n \times n$ compleja, tal que todos sus valores propios son reales. Probar que A es semejante a una matriz con coeficientes reales.

14. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V de dimensión finita. Probar que T tiene un vector cíclico si y sólo si todo operador lineal U que conmuta con T es un polinomio en T.

15. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo.
    (a) Sean $N_1, N_2 \in M_3(\mathbb{F})$ nilpotentes. Demostrar que N_1 y N_2 son semejantes si y sólo si tienen el mismo polinomio minimal.
    (b) Usar la parte (a) y la forma de Jordan para probar que si $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ con el mismo polinomio característico
    $$f(x) = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k},$$
    el mismo polinomio minimal y ningún d_i es mayor que 3 entonces A y B son semejantes.

16. Sea A una matriz compleja con polinomio característico
$$p_A(x) = (x-2)^3(x+7)^2$$
y polinomio minimal $m_A(x) = (x-2)^2(x+7)$. Encontrar la forma de Jordan de A.

17. ¿Cuántas posibles formas de Jordan hay para una matriz compleja 6×6 con polinomio característico $f = (x+2)^4(x-1)^2$?

18. Encontrar la forma de Jordan de la siguiente matriz
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

19. Clasificar, salvo semejanza, las matrices 3×3 complejas tales que $A^3 = I$.

20. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, y sea N una matriz $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ tal que $N^n = 0$, pero $N^{n-1} \neq 0$. Probar que N no tiene una raíz cuadrada; es decir, que no existe una matriz A, $n \times n$, tal que $A^2 = N$. Más aún, si $\ell > 2$, entonces N no tiene una raíz ℓ-ésima.

21. Sean $N_1, N_2 \in M_6(\mathbb{F})$ matrices nilpotentes, que tienen el mismo polinomio minimal y la misma nulidad. Probar que N_1 y N_2 son semejantes. Muestre que esto no es cierto para el caso 7×7.

22. Sea N una matriz nilpotente elemental $k \times k$, es decir, $N^k = 0$ y $N^{k-1} \neq 0$. Probar que N^t es semejante a N. Demostrar que toda matriz compleja $n \times n$ es semejante a su transpuesta (ayuda: usar la forma de Jordan y el resultado anterior).