ÁLGEBRA III - 2019
Práctico 7

Espacios con producto interno.

1. Sea V un espacio vectorial con producto interno $(,)$. Probar que:

   (a) $(0, \beta) = 0$ para todo $\beta \in V$.

   (b) Si $(\alpha, \beta) = 0$ para todo $\beta \in V$, entonces $\alpha = 0$.

2. Sea $(,)$ el producto interno canónico en $\mathbb{R}^2$ y sean $\alpha = (1, 2)$ y $\beta = (-1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Encontrar $\gamma \in \mathbb{R}^2$ tal que $(\alpha, \gamma) = -1$ y $(\beta, \gamma) = 3$.

3. Sea $(,)$ el producto interno canónico en $\mathbb{R}^2$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el operador lineal dado por $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Mostrar que T es la "rotación en 90°" y que tiene la propiedad que $(\alpha, T(\alpha)) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}^2$. Hallar todos los productos internos $\langle\ ,\ \rangle$ en $\mathbb{R}^2$ tales que $\langle\, \alpha, T(\alpha)\, \rangle = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}^2$.

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Para $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ sea

$$(X|Y)_A := Y^t A X.$$

   Probar que $(\quad|\quad)_A$ es un producto interno si y sólo si $A = A^t$, $a_{11}, a_{22} > 0$ y $\det A > 0$.

5. Sea V un espacio producto interno. Mostrar que la forma cuadrática asociada al producto interno satisface la *regla del paralelogramo*:

$$||\alpha + \beta||^2 + ||\alpha - \beta||^2 = 2||\alpha||^2 + 2||\beta||^2.$$

6. Sea $\mathcal{C}[0, 1]$ el espacio de funciones continuas en $[0, 1]$ con valores en $\mathbb{R}$.

   (a) Mostrar que

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$$

   con $f, g \in \mathcal{C}[0, 1]$ define un producto interno en $\mathcal{C}[0, 1]$.

   (b) Restringir este producto interno al subespacio $\mathcal{P}$ de funciones polinomiales y dar una fórmula para el mismo en términos de los coeficientes de cada par de polinomios.

   (c) Dado $n \in \mathbb{N}$, restringir este producto interno al subespacio $\mathcal{P}^n$ de funciones polinomiales de grado menor o igual a n y dar la matriz del producto interno relativa a la base $\{1, x, \ldots, x^n\}$.

7. Sea $\mathbb{R}^4$ con el producto interno usual. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ formado por los vectores que son ortogonales a $\alpha = (1, 0, -1, 1)$ y a $\beta = (2, 3, -1, -2)$. Hallar una base de W.

8. Aplicar el *proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt* para resolver los siguientes puntos.

   (a) Encontrar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con el producto interno estándar a partir de la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 4)\}$.

   (b) Sea $\mathbb{C}^3$ con el producto interno canónico. Encontrar una base ortonormal del subespacio generado por $\beta_1 = (1, 0, i)$ y $\beta_2 = (2, 1, 1 + i)$.

9. Sea $\mathcal{P}^3 \subset \mathbb{R}[x]$ el espacio de polinomios de grado a lo sumo 3, con el producto interno dado por
$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$
   (a) Hallar el complemento ortogonal del subespacio de los polinomios escalares.
   (b) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

10. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ortonormal de V. Probar que para todo par de vectores α y β en V:
$$(\alpha|\beta) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha|\alpha_k)\overline{(\beta|\alpha_k)}.$$

11. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^2$ generado por $(3, 4)$. Sea E la proyección ortogonal sobre W.
   (a) Hallar $W^\perp$.
   (b) Hallar una fórmula para $E(x, y)$ y la matriz de E en la base canónica.
   (c) Dar una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ en la cual la matriz de E sea $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

12. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita, y sea $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ortonormal de V. Sea T unoperador lineal en V y A la matriz de T en la base $\mathcal{B}$. Probar que
$$A_{ij} = (T\alpha_j|\alpha_i).$$

13. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Se define la distancia entre dos vectores α, $\beta \in V$ como $d(\alpha, \beta) = ||\alpha - \beta||$. Mostrar que
   (a) $d(\alpha, \beta) \geq 0$ para todo $\alpha, \beta \in V$.
   (b) $d(\alpha, \beta) = 0$ si y sólo si $\alpha = \beta$.
   (c) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$ para todo $\alpha, \beta \in V$.
   (d) $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta)$ para todo $\alpha, \beta, \gamma \in V$.

14. Sea $V = M_n(\mathbb{C})$ con el producto interno dado por $(A|B) = tr(AB^*)$. Encontrar el complemento ortogonal al subespacio de matrices diagonales.

15. Sea S un subconjunto de un espacio producto interno V. Probar que $\left(S^\perp\right)^\perp$ contiene al subespacio generado por S. Si V es de dimensión finita probar que $\left(S^\perp\right)^\perp = \langle S\rangle$.

16. Sea V el espacio producto interno real de las funciones continuas a valores reales definidas en $[-1, 1]$ con el producto interno
$$(f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt.$$
Sea W el espacio de funciones impares (i.e. cumplen $f(-t) = -f(t)$). Encontrar el complemento ortogonal de W.

17. Consideremos $\mathbb{C}^2$ con el producto interno usual. Sea T el operador lineal dado por $Te_1 = (1, 2)$ y $Te_2 = (i, -1)$. Encontrar $T^*\alpha$ para $\alpha = (x_1, x_2)$.

18. Sea T el operador lineal en $\mathbb{C}^2$ definido por $Te_1 = (1 + i, 2)$ y $Te_2 = (i, i)$. Usando el producto interno usual encontrar la matriz de T^* en la base ordenada canónica. ¿Conmuta T con T^*?

19. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y T un operador lineal sobre V. Demostrar que $\mathrm{Im}(T^*) = \ker(T)^\perp$.

20. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y T un operador lineal sobre V. Si T es inversible, probar que T^* es inversible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

21. Probar que el producto de dos operadores autoadjuntos es autoadjunto si y sólo si los dos operadores conmutan.

22. Sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que 3 con el producto interno $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

    (a) Si $t \in \mathbb{R}$, hallar el polinomio g_t de V tal que $(f|g_t) = f(t)$ para todo f de V.

    (b) Hallar D^*, donde D es el operador derivación sobre V.

23. Sea $V = M_n(\mathbb{C})$ con el producto interno $(A|B) = \mathrm{tr}(AB^*)$. Sea $P \in V$ inversible, y sea T_P el operador lineal sobre V definido por $T_P(A) = P^{-1}AP$. Hallar el adjunto de T_P.

24. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y sea E un operador lineal idempotente sobre V; es decir, $E^2 = E$. Demostrar que E es autoadjunto si y sólo si $EE^* = E^*E$.

25. Sea V un espacio producto interno complejo de dimensión finita, y sea T un operador en V. Probar que T es autoadjunto si y sólo si $(T\alpha|\alpha) \in \mathbb{R}$, para todo α en V.