

ÁLGEBRA III - 2019
Práctico 8

Funcionales lineales y adjuntas. Operadores unitarios y normales. Teoría espectral.

1. Probar que $A \in M_2(\mathbb{R})$ es ortogonal si y sólo si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

donde $a^2 + b^2 = 1$.

2. Probar que una matriz $A \in M_2(\mathbb{C})$ es unitaria si y sólo si es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{C}$ con $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

3. Encontrar una matriz unitaria que no sea ortogonal, y una ortogonal que no sea unitaria.
4. Sea $V = M_n(\mathbb{C})$ con el producto interno $(A|B) = \text{tr}(AB^*)$. Para cada M sea L_M el operador multiplicar a izquierda por M . Probar que L_M es unitario si y sólo si M es una matriz unitaria.
5. Sea V el espacio \mathbb{C} considerado como espacio vectorial real.
- Probar que $(\alpha|\beta) = \text{Re}(\alpha\bar{\beta})$ define un producto interno en V .
 - Dar un isomorfismo de espacios producto interno entre V y \mathbb{R}^2 con el producto interno canónico.
 - Para cada $\gamma \in V$, sea M_γ el operador definido por $M_\gamma(\alpha) = \gamma\alpha$. Probar que $(M_\gamma)^* = M_{\bar{\gamma}}$.
 - ¿Para qué números complejos γ es M_γ autoadjunta?
 - ¿Para cuáles γ es M_γ unitaria?
 - Encontrar la matriz de M_γ en la base $\{1, i\}$.
 - Si T es un operador lineal en V , hallar condiciones necesarias y suficientes para T para que sea un M_γ .
6. Sea $V = \mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico. Si U es un operador unitario sobre V , probar que la matriz de U en la base ordenada canónica es de la forma:

$$U_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad V_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{para algún } \theta \text{ real.}$$

- Notar que U_θ es una rotación de ángulo θ y observar que todo operador unitario en V es o bien una rotación o bien una reflexión seguida de una rotación.
 - ¿Qué es $U_\theta U_\phi$?
 - Probar que $U_\theta^* = U_{-\theta}$.
 - Sea ϕ un número real fijo, y sea $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ la base ortonormal que se obtiene al rotar la base canónica en un ángulo ϕ . ¿Cuál es la matriz de U_θ en la base \mathcal{B} ?
7. Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno usual. Sea W el plano generado por $\alpha = (1, 1, 1)$ y $\beta = (1, 1, -2)$. Sea U la transformación lineal definida geoméricamente como una rotación de ángulo θ alrededor de la recta ortogonal a W que pasa por el origen. Hallar la matriz de U en la base canónica.
- (Ayuda: Hallar $\{w_1, w_2\}$ una base ortonormal de W y w_3 un vector de norma 1 ortogonal a W . Hallar la matriz de U en esa base y luego hacer el cambio de base.)

8. Demostrar que $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ son unitariamente equivalentes para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
9. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita. Para cada α, β en V , sea $T_{\alpha, \beta}$ el operador lineal en V definido por $T_{\alpha, \beta}(\gamma) = (\gamma | \beta) \alpha$. Demostrar que:
- $T_{\alpha, \beta}^* = T_{\beta, \alpha}$.
 - $\text{traza}(T_{\alpha, \beta}) = (\alpha | \beta)$.
 - $T_{\alpha, \beta} T_{\gamma, \delta} = T_{\alpha, (\beta | \gamma) \delta}$.
 - ¿En qué condiciones es $T_{\alpha, \beta}$ autoadjunto?
10. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y sea W un subespacio de V . Entonces $V = W \oplus W^\perp$, esto es, todo α de V se expresa unívocamente en la forma $\alpha = \beta + \gamma$, con β en W y γ en W^\perp . Se define un operador lineal U por $U(\alpha) = \beta - \gamma$.
- Interpretar geoméricamente.
 - Demostrar que U es autoadjunto y unitario.
 - Si V es \mathbb{R}^3 con el producto interno canónico y $W = \langle (1, 0, 1) \rangle$, hallar la matriz de U en la base ordenada canónica.
 - Probar que no existen otros operadores autoadjuntos y unitarios (i.e. todo operador autoadjunto y unitario proviene de algún subespacio W como se describió arriba).
11. Sea V es un espacio producto interno. Un *movimiento rígido* en V es una función $T : V \rightarrow V$ (no necesariamente lineal) tal que $\|T\alpha - T\beta\| = \|\alpha - \beta\|$, para todo $\alpha, \beta \in V$ (por ejemplo un operador unitario o una traslación).
- Sea $V = \mathbb{R}^2$ con el producto interno usual. Sea T un movimiento rígido tal que $T(0) = 0$. Probar que T es lineal y unitario.
 - Probar que todo movimiento rígido de \mathbb{R}^2 es composición de una traslación seguida de un operador unitario.
 - Probar que todo movimiento rígido de \mathbb{R}^2 es o bien una traslación seguida de una rotación o bien una traslación seguida de una reflexión seguida de una rotación.
12. Para cada una de las siguientes matrices reales A hallar una matriz ortogonal real P tal que $P^t A P$ sea diagonal
- $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$
13. Sea $V = \mathbb{C}^2$ con el producto interno canónico. Sea T el operador lineal sobre V representado en la base canónica por
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$
- Demostrar que T es normal y hallar una base ortogonal de V formada por autovectores de T .
14. Dar una matriz A , 2×2 , tal que A^2 sea normal pero A no lo sea.
15. Sea T un operador en un espacio producto interno de dimensión finita.
- Si T es unitario y positivo probar que $T = I$.
 - Si T es normal y nilpotente probar que es el operador nulo.
16. Sea T es un operador normal. Probar que los autovectores de T asociados a autovalores distintos son ortogonales.

17. Demostrar que T es normal si y sólo si $T = T_1 + iT_2$ donde T_1 y T_2 son operadores autoadjuntos que conmutan.
18. Probar que toda matriz simétrica real A tiene una raíz cúbica simétrica real, es decir, existe B simétrica real tal que $B^3 = A$.
19. Sea A una matriz compleja $n \times n$ tal que $A^* = -A$. Sea $B = e^A$. Probar que
- $\det B = e^{\operatorname{tr} A}$.
 - $B^* = e^{-A}$.
 - B es unitaria.
20. Sean U y T operadores normales que conmutan. Demostrar que $U + T$ y UT son normales.
21. Sea V un espacio producto interno complejo de dimensión finita y sea U un operador unitario sobre V que satisface: $U\alpha = \alpha$ implica $\alpha = 0$. Sea

$$f(z) = i \frac{1+z}{1-z}, \quad z \neq 1.$$

Demostrar que

- $f(U) = i(I + U)(I - U)^{-1}$;
- $f(U)$ es autoadjunto; y
- para todo operador autoadjunto T sobre V , el operador

$$U = (T - iI)(T + iI)^{-1}$$

es unitario y tal que $T = f(U)$.

22. Sea T un operador lineal en V , un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Probar que las siguiente condiciones son equivalentes.
- T es normal.
 - $\|T\alpha\| = \|T^*\alpha\|$, para todo $\alpha \in V$.
 - Si $\alpha \in V$, $c \in \mathbb{C}$ tal que $T\alpha = c\alpha$ entonces $T^*\alpha = \bar{c}\alpha$.
 - Existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T .
 - Todo espacio T -invariante es T^* -invariante.
 - $T = NU$ donde N es no negativa, U unitaria y $NU = UN$.
 - $T = c_1E_1 + \cdots + c_kE_k$, donde $I = E_1 + \cdots + E_k$, $E_iE_j = 0$ ($i \neq j$), $E_j^2 = E_j = E_j^*$.
23. Sea $V = M_n(\mathbb{C})$ con el producto interno

$$(A|B) = \operatorname{tr}(AB^*).$$

Si $B \in V$, sean L_B , R_B y T_B los operadores lineales sobre V definidos por

$$L_B(A) := BA, \quad R_B(A) := AB, \quad T_B(A) := BA - AB.$$

- Considerar las 3 familias de operadores que se obtienen al hacer variar B sobre todas las matrices diagonales. Demostrar que cada una de estas familias es un álgebra autoadjunta conmutativa y hallar sus descomposiciones espectrales.
- Probar que L_B es unitariamente equivalente a R_B .