Mecánica Cuántica I

Guía 1: Motivaciones de la Cuántica

12 de marzo de 2025

Problema 1: El problema del espectro de cuerpo negro fue estudiado a fines del siglo XIX por Rayleigh y Jeans usando la teoría clásica de la radiación. Ellos obtuvieron para la densidad de energía la fórmula

$$\epsilon(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi\nu^2 kT\,\mathrm{d}\nu}{c^3}\ .$$

a) ¿Por qué es imposible que sea correcta para todo ν una fórmula que depende así de la frecuencia?

b) Buscando una modificación del tratamiento anterior que reduzca las contribuciones de alta frecuencia a la energía, Planck asumió que la energía de un oscilador de frecuencia natural ν está restringida a múltiplos enteros de una unidad básica $h\nu$. Así obtuvo la siguiente expresión para la densidad de energía

$$\epsilon(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 \frac{e^{-h\nu/kT}}{1-e^{-h\nu/kT}}\,\mathrm{d}\nu\ .$$

Demuestre que en el límite $\nu \to 0$ la ley de radiación de Planck se reduce a la fórmula de Rayleigh-Jeans, y para valores grandes de $h\nu/kT$, a la ley de Wien:

$$\epsilon(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 e^{-h\nu/kT}\,\mathrm{d}\nu\ .$$

c) Muestre que la distribución de Planck predice adecuadamente la ley de Stefan-Boltzmann, es decir, la energía total (integrando en frecuencia) por unidad de volumen es proporcional a T^4.

Problema 2: La función trabajo del sodio es 2,3 eV. ¿Cuál es la máxima longitud de onda de luz que producirá emisión de fotoelectrones en este material? ¿Cuál es la máxima energía cinética de los fotoelectrones si luz de 2000 Å incide sobre la superficie del sodio?

Problema 3: A partir de la conservación del impulso y la energía, demuestre que en la dispersión Compton el fotón dispersado en una dirección θ respecto de la incidente aumenta su longitud de onda en

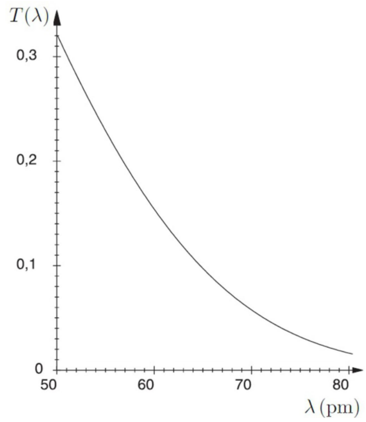
$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}\left(1-\cos\theta\right)\ ,$$

donde m_e es la masa del electrón y c, la velocidad de la luz.

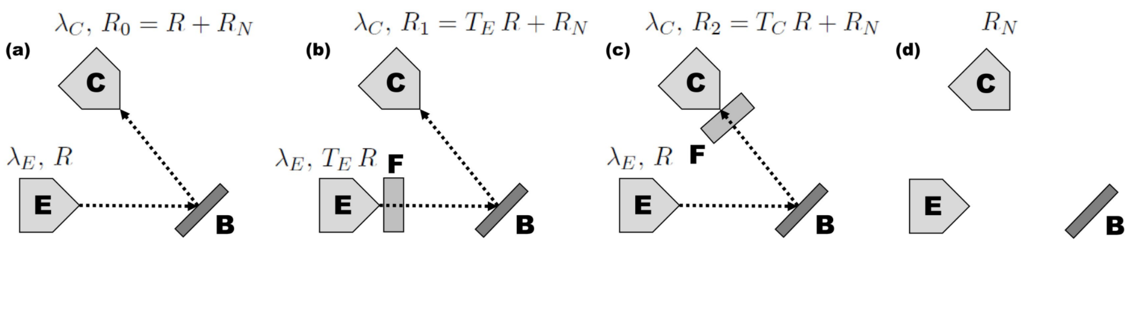
Problema 4: Demuestre que es imposible que un fotón ceda toda su energía y momento a un electrón libre. Esto significa que el efecto fotoeléctrico puede tener lugar solamente cuando los fotones interactúan con electrones ligados.

Problema 5: Un ingenioso experimento para medir el corrimiento en la longitud de onda debido al efecto Compton se esquematiza en la figura (diseño de R.W. Pohl), donde intervienen una fuente emisora de rayos X (E), un contador Geiger-Müller (C) (mide la tasa de radiación en cuentas/s o s^{-1}), un blanco de aluminio (B) y un filtro de cobre (F). Al pasar por el filtro, el haz de rayos X se atenúa, y el coeficiente de transmisión T depende de la longitud onda λ según

$$T(\lambda) = \exp\left[-a\left(\lambda/\lambda_a\right)^n\right]\ ,$$



siendo $a = 7,6$, $\lambda_a = 100$pm y $n = 2,75$ para el caso de un film de cobre con un espesor de 70μm. En la primera etapa (a), desde E se emite una tasa de radiación R con una longitud de onda λ_E (fuente monocromática), registrando el contador una tasa $R_0 = R + R_N$, con una longitud de onda λ_C (suponemos que no hay pérdidas), donde R_N es el ruido propio del contador más la radiación ambiente de fondo. A continuación (b) se dispone el filtro de cobre frente al emisor y la tasa de radiación que llega a B será $T_E\,R$, de modo que el contador registra $R_1 = T_E\,R + R_N$. Luego (c) el filtro se ubica justo antes del contador C midiéndose una tasa $R_2 = T_C\,R + R_N$. Finalmente (d), se obtiene la tasa de ruido R_N apagando el emisor E y midiendo el registro del contador.



a) Calcule los coeficientes de transmisión T_E y T_C si los valores medidos en el contador son: $R_0 = 5,75\text{s}^{-1}$, $R_1 = 0,813\text{s}^{-1}$, $R_2 = 0,646\text{s}^{-1}$ y $R_N = 0,220\text{s}^{-1}$.

b) Utilizando la expresión de $T(\lambda)$ para el cobre y los resultados del ítem anterior, calcule el corrimiento $\Delta\lambda = \lambda_C - \lambda_E$ debido al efecto Compton.

c) Con la expresión teórica para $\Delta\lambda$ y el resultado del ítem anterior, calcule el ángulo en que está el eje del contador con respecto al eje de la fuente.

Problema 6: a) Para medir la energía de un sistema cuántico con una incertidumbre ΔE es necesario un experimento de una duración Δt tal que $\Delta E\,\Delta t \geq \hbar/2$. ¿Cuánto tiempo se necesita para medir la energía cinética de un electrón cuya velocidad es 10 m/s con una indeterminación de no más del 0,1 %? ¿Qué distancia habrá recorrido el electrón en ese intervalo de tiempo?

b) Efectúe los mismos cálculos para un insecto de masa 1 gramo cuya velocidad sea la misma que la del electrón. ¿Qué se puede concluir de estos resultados?

Problema 7: En un experimento de doble rendija con una fuente de electrones, los detectores están colocados a lo largo de una pantalla vertical paralela al eje y, a fin de monitorear el patrón de difracción de los electrones emitidos desde las dos rendijas. Cuando sólo una rendija está abierta, la amplitud de los electrones detectados es $f_1(y,t) = A\,e^{-i(ky-\omega t)}/\sqrt{1+y^2}$ y cuando la otra rendija está abierta la amplitud detectada es $f_2(y,t) = A\,e^{-i(ky+\pi y-\omega t)}/\sqrt{1+y^2}$, donde A es conocida. Calcule la intensidad detectada en la pantalla cuando

a) ambas rendijas están abiertas y se utiliza una fuente de luz para determinar por cuál de las rendijas pasan los electrones;

b) ambas rendijas están abiertas y no se utiliza ninguna fuente de luz.

Dibuje ambas intensidades registradas.

Problema 8: En un experimento de dispersión de protones (no relativistas) de 2 eV por un cristal, el quinto máximo de la intensidad se observa a un ángulo $\phi = 30°$, donde ϕ es el ángulo entre la dirección de las partículas incidentes y la superficie del cristal. Estime la separación de los planos del cristal.

Problema 9: Se ha ideado el siguiente diseño experimental para medir la velocidad de una partícula que sigue una trayectoria unidimensional: dos láseres muy colimados de 1 μm de diámetro están alineados con sendos fotodiodos. De esta manera, cuando la partícula atraviesa el primer fotodiodo se activa un cronómetro de apreciación 10^{-4} s, y cuando atraviesa el último, aquel se detiene. Suponga que la partícula tiene una masa de 1 mg, determinada con una balanza de 1 μg de apreciación, y que la distancia entre ambos fotodiodos es de 1 cm.

a) Si el tiempo registrado es 10 s, compare el producto $\Delta p\,\Delta x$ de las incertidumbres experimentales con el límite inferior $\hbar/2$ impuesto por el principio de incertidumbre.

b) ¿Cuán liviana (pequeña) debería ser la partícula para que $\Delta p\,\Delta x \simeq \hbar$?
Manteniendo la masa de 1 mg, ¿cuán lenta debería ser para satisfacer esa condición? En ambos casos suponga que se mantienen las incertezas experimentales relativas del apartado anterior.

Problema 10: Considere el modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno. Basándose en la cuantización del momento angular encuentre:

a) una relación entre el radio de las órbitas y la longitud de onda de de Broglie para los electrones;

b) los radios de las órbitas permitidas y las energías correspondientes.

Problema 11: De acuerdo al modelo atómico de Bohr, si un electrón se mueve en una de las órbitas permitidas, su energía se mantiene constante (estado estacionario). El electrón puede sufrir una transición “no clásica” de un estado estacionario a otro de energía inferior emitiendo radiación electromagnética de frecuencia $\nu = \Delta E/h$, siendo ΔE la diferencia de energía entre los dos estados involucrados y $h = 2\pi\hbar$.

a) Balmer encontró una fórmula empírica para representar las longitudes de onda de las líneas correspondientes al espectro de emisión del hidrógeno que se encuentra en la región visible (esta serie de líneas espectrales se conoce como serie de Balmer): $\lambda_n = an^2/(n^2-4)$. Determine el valor de la constante a.

b) Determine en qué región del espectro electromagnético se encuentran las siguientes series del hidrógeno:

b$_1$) serie de Lyman ($n_f = 1$);

b$_2$) serie de Paschen ($n_f = 3$).

(n_f representa el número cuántico correspondiente al estado hacia el cual el electrón sufre la transición)