Mecánica Cuántica I

Guía 3: Espacios de Hilbert y operadores 28 de marzo de 2025

Problema 1: *Identidades de polarización.* Usando $\|f\| = \sqrt{\langle f|f\rangle}$, verifique que

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\,\|f-ig\|^2 - i\,\|f+ig\|^2\Big)\,,$$

lo que permite expresar el producto escalar complejo $\langle\cdot|\cdot\rangle$ en términos de la norma asociada. Verifique también que, para un operador lineal $\hat{A}$, vale

$$\langle f|\hat{A}g\rangle = \frac{1}{4}\Big\{\langle f+g|\hat{A}\,(f+g)\rangle - \langle f-g|\hat{A}\,(f-g)\rangle + i\,\langle f-ig|\hat{A}\,(f-ig)\rangle - i\langle f+ig|\hat{A}\,(f+ig)\rangle\Big\}\,,$$

(Observe que la primera identidad de polarización es consecuencia de la segunda.)

Problema 2: *Desigualdad triangular.* Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|\langle f|g\rangle|^2 \le \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle$, muestre que para la norma $\|\cdot\|$ asociada a un producto escalar sobre un espacio vectorial se tiene

$$\big|(\|f\| - \|g\|)\big| \;\le\; \|f+g\| \le \|f\| + \|g\|\,,$$

cualesquiera sean los vectores f y g.

Problema 3: Dado un operador lineal $\hat{A}$, su adjunto se define como el operador $\hat{A}^\dagger$ tal que, para cualquier par de vectores en el espacio de Hilbert, vale $\langle\phi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle = (\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle)^*$. Dados dos operadores lineales $\hat{A}$ y $\hat{B}$, y α un número complejo, demuestre que

a) $(\alpha\,\hat{A} + \hat{B})^\dagger = \alpha^*\,\hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger$;

b) $(\hat{A}\,\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\,\hat{A}^\dagger$;

c) $\left(\hat{A}^{-1}\right)^\dagger = \left(\hat{A}^\dagger\right)^{-1}$;

d) $\left(\hat{A}^\dagger\right)^\dagger = \hat{A}$.

Problema 4: Dados dos operadores autoadjuntos $\hat{A}$ y $\hat{B}$, ¿qué puede decir sobre la hermiticidad de los siguientes operadores: $\hat{A}\hat{B}$, $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$, $[\hat{A},\hat{B}]$, $i[\hat{A},\hat{B}]$?

NOTA: en un espacio de dimensión finita todo operador hermitiano es autoadjunto

Problema 5: Muestre que para el operador exponencial se cumplen las siguientes propiedades:

a) $e^{(t+s)\hat{A}} = e^{t\hat{A}}\;e^{s\hat{A}}$;

b) si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ conmutan entonces $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}\,e^{\hat{B}}$;

c) $\dfrac{\mathrm{d}\,e^{t\hat{A}}}{\mathrm{d}\,t} = \hat{A}\,e^{t\hat{A}}$.

Problema 6: Muestre que los autovectores de un operador A también son autovectores de $B = f(A)$ y encuentre los autovalores de B en términos de los de A.

Problema 7: **a)** Muestre que cualquier operador lineal puede ser escrito como combinación lineal de dos operadores autoadjuntos.

b) Muestre que si $\hat{A}$ es un operador autoadjunto el operador $\hat{U} = e^{i\hat{A}}$ es unitario.

Problema 8: Dados los operadores $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ demuestre que

a) $[\hat{A},\hat{A}] = 0$.

b) $[\hat{A},\hat{B}] + [\hat{B},\hat{A}] = 0$.

c) $[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}] + [\hat{A},\hat{C}]$.

d) $[\hat{A},\hat{B}\,\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$.

e) $[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]] + [\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]] + [\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]] = 0$ (identidad de Jacobi).

f) $e^{\hat{A}}\,\hat{B}\,e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + \dfrac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \dfrac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] + \cdots$

(una de las fórmulas de Baker-Campbell-Hausdorff).

Sugerencia: Escriba el desarrollo en Serie de Taylor de la función $e^{t\hat{A}}\,\hat{B}\,e^{-t\hat{A}}$ alrededor de t.

g) Si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ conmutan con sus conmutadores, entonces:

g$_1$) $[\hat{A},\hat{B}^N] = N\hat{B}^{N-1}[\hat{A},\hat{B}]$; $[\hat{A}^N,\hat{B}] = N\hat{A}^{N-1}[\hat{A},\hat{B}]$;

g$_2$) $e^{\hat{A}}\, e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+[\hat{A},\hat{B}]/2} = e^{\hat{B}}\, e^{\hat{A}}\, e^{[\hat{A},\hat{B}]}$.

Sugerencia: Considere la función $f(s) = e^{s\hat{A}}e^{s\hat{B}}$, calcule su derivada con respecto a s, y reescríbala usando el resultado del ítem **f)**.

Problema 9: Calcule los autovalores y autovectores de cada una de las *matrices de Pauli*

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 10: **a)** Cuál es la acción del operador cuya matriz en una base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ ortogonal de $\mathbb{R}^3$ es

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Compruebe que R es unitaria.

Problema 11: Construya un ejemplo de una función sobre $\mathbb{R}$ de módulo cuadrado integrable pero que no tienda a cero cuando $|x| \to \infty$ ($x \in \mathbb{R}$).
Sugerencia: un peine con infinitos dientes rectangulares o triangulares.

Problema 12: **a)** Muestre que los operadores posición $\hat{\boldsymbol{r}}$ y momento lineal $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\nabla$ no pueden estar definidos sobre todo $L^2(\mathbb{R}^n)$, encontrando ejemplos ψ_x y $\psi_p \in L^2(\mathbb{R})$ tales que $(\hat{x}\,\psi_x) \notin L^2(\mathbb{R})$ y $(\hat{p}\,\psi_p) \notin L^2(\mathbb{R})$.

b) El espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es el subespacio de $L^2(\mathbb{R}^n)$ de funciones infinitamente diferenciables y que tienden a 0 para $\boldsymbol{r} \to \infty$ más rápido que cualquier polinomio. Muestre que los operadores posición, momento lineal y momento angular $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ definidos sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ son autoadjuntos.

c) Calcule los conmutadores $\left[\hat{p}_j{}^2, f(\hat{\boldsymbol{r}})\right]$ y $\left[\hat{L}_j, \hat{L}_k\right]$, $\quad j,k = x,y,z$.

d) Para $n = 1$, calcule $[\hat{x}^{\,2}, \hat{p}^{\,2}]$.

Problema 13: Considere la función de onda $\psi(x) = A(\sigma + x)\exp\left(-x^2/4\sigma^2\right)$, con A y σ constantes positivas.

a) Halle A tal que ψ esté normalizada.

b) Suponga que se realiza una medición de la paridad, correspondiente al operador (hermítico) de inversión Π. Indique cuáles son los valores que pueden medirse y con qué probabilidad.

c) En cada caso, indique cuál es la función de onda para el instante posterior a la medición.

d) En cada caso, indique cuál es el resultado si se vuelve a realizar, inmediatamente, una nueva medición de la paridad.

Problema 14: Demuestre el llamado "Teorema de Ehrenfest": Si $\hat{H} = \hat{\boldsymbol{p}}^2/2m + V(\hat{\boldsymbol{r}})$, los valores esperados de las variables dinámicas cuánticas $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{p}}$ satisfacen ecuaciones de movimiento análogas a las clásicas.

Problema 15: Considere las ecuaciones de evolución de Heisenberg especificadas por el hamiltoniano (autoadjunto) $\hat{H}$: $\hat{A}(t) = \hat{U}_t^\dagger \hat{A}\, \hat{U}_t$, donde $\hat{U}_t = \exp(-it\hat{H}/\hbar)$. Muestre que: $[\hat{A}(t)]^\dagger = \hat{A}^\dagger(t)$, $(z\hat{A} + \hat{B})(t) = z\hat{A}(t) + \hat{B}(t)$ para $z \in \mathbb{C}$, y $(\hat{A}\hat{B})(t) = \hat{A}(t)\,\hat{B}(t)$.

Problema 16: Considere un oscilador armónico unidimensional de masa m y constante de Hooke k, de modo que la frecuencia angular es $\omega = \sqrt{k/m}$.

a) Recordando las soluciones clásicas, resuelva las ecuaciones de movimiento (de Heisenberg) para los operadores posición $\hat{x}$ y momento $\hat{p}$.

b) Introduzca el operador (las constantes se eligen solamente para obtener un operador adimensional)

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\,\hat{p}$$

y su adjunto $\hat{a}^\dagger$. Resuelva ahora las ecuaciones de movimiento para $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$.

c) Verifique que el operador $\hat{a}$ no es normal calculando el conmutador con su adjunto.

d) ¿Qué puede deducir del hecho que $\hat{a}^\dagger(t)\,\hat{a}(t)$ es independiente del tiempo? Exprese el hamiltoniano del oscilador armónico en términos del operador $\hat{a}$ y su adjunto.