Mecánica Cuántica I

Guía 5: El oscilador armónico 25 de abril de 2025

Problema 1: *Tratamiento algebraico del problema.* El hamiltoniano para el oscilador armónico unidimensional es

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \ .$$

a) Si $\hat{u}$ y $\hat{v}$ son hermitianos, para el operador $\hat{z} = \hat{u} + i\hat{v}$ se tiene que $\hat{z}\hat{z}^\dagger = \hat{u}^2 + \hat{v}^2 + i[\hat{v}, \hat{u}]$. Esto se parece a $\hat{H}$, salvo por el conmutador. Pero si el conmutador es proporcional a la identidad (como en el caso de $\hat{x}$ y $\hat{p}$), ese término es una corrección escalar a las energías. Considere entonces $\hat{u} = \alpha\hat{x}$ y $\hat{v} = \beta\hat{p}$, y encuentre α y $\beta \in \mathbb{R}$ para que se cumpla $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{I})$.

b) Muestre que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I}$.

c) Considere el hamiltoniano reducido $\hat{h} = \hat{H}/\hbar\omega$. Muestre que $[\hat{a}, \hat{h}] = \hat{a}$ y $[\hat{a}^\dagger, \hat{h}] = -\hat{a}^\dagger$.

d) Suponga que conocemos un estado $|\varepsilon\rangle$ tal que $\hat{h}|\varepsilon\rangle = \varepsilon|\varepsilon\rangle$. Muestre que $\hat{a}|\varepsilon\rangle = C|\varepsilon-1\rangle$ y que $\hat{a}^\dagger|\varepsilon\rangle = B|\varepsilon+1\rangle$. Es decir los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ llevan el estado $|\varepsilon\rangle$ a uno con un cuanto de energía menos ($|\varepsilon-1\rangle$) y a uno con un cuanto de energía más ($|\varepsilon+1\rangle$), respectivamente. De aquí que se los denomine operadores de creación y aniquilación.

e) Muestre que $\langle\, \psi\, |\hat{h}|\, \psi\, \rangle \geq 0$ para cualquier estado del espacio de Hilbert.
Ayuda: note que $\langle\, \psi\, |\hat{A}^2|\, \psi\, \rangle = \langle \hat{A}\psi | \hat{A}\psi \rangle$ para $\hat{A}$ hermitiano.

f) Considerando el punto anterior, muestre que debe existir un estado $|\varepsilon_o\rangle$ que cumple $\hat{a}|\varepsilon_o\rangle = 0$.

g) Deduzca que la energía del estado $|\varepsilon_o\rangle$ es $\varepsilon_o = 1/2$ y por lo tanto $\varepsilon_n = n + 1/2$.

h) Renombrando los autoestados de manera que $|n\rangle \equiv |\varepsilon_n\rangle$, muestre que (salvo una fase) $\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ y $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$.

i) Muestre que el operador número $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ cumple $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$.

j) Encuentre $|n\rangle$ en términos de $|0\rangle$.

k) Encuentre las expresiones de $\hat{x}$ y $\hat{p}$ en términos de los operadores de subida y bajada.

$\boldsymbol{\ell}$) Considerando el punto **f)**, encuentre $\psi_o(x) = \langle x|0\rangle$.

Problema 2: *Tratamiento analítico del problema del oscilador armónico.*

a) Verifique que, cuando el potencial al que se somete una partícula de masa m es $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ (donde $\omega > 0$ es constante), la ecuación de Schrödinger puede ser escrita como

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}y^2} + (2\varepsilon - y^2)\,\psi(y) = 0 \ ,$$

donde $y = x(m\omega/\hbar)^{1/2}$ y $\varepsilon = E/\hbar\omega$, siendo E el correspondiente autovalor del hamiltoniano.

b) Observe que en el límite $y \to \pm\infty$, la ecuación diferencial resultante es $\psi'' - y^2\psi = 0$, y admite soluciones del tipo $\exp(-y^2/2)$. Analice entonces para la solución general

$$\psi(y) = u(y)\, e^{-y^2/2}$$

qué ecuación debe satisfacer $u(y)$.

c) Una alternativa para resolver la ecuación diferencial resultante para $u(y)$ es proponer

$$u(y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, y^k$$

y buscar la relación que debe haber entre los coeficientes C_k. Agrupando los términos de mismo orden en y, encuentre la relación de recurrencia

$$C_{k+2} = C_k\, \frac{2k + 1 - 2\varepsilon}{(k+2)(k+1)} \ .$$

d) Analice nuevamente los límites $y \to \pm\infty$ para ver que los únicos valores permitidos para ε son $n + 1/2$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$, obteniendo así el espectro de energías.

e) Vea entonces que la ecuación diferencial de b) para cada n es satisfecha por el polinomio de Hermite H_n. Derive la expresión general para las autofunciones

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\,\hbar\, 2^{2n}\, n!^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) H_n\left(\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x\right) \ .$$

Problema 3: Calcule la probabilidad de que la posición de un oscilador armónico en su estado fundamental tenga un valor mayor que la amplitud de un oscilador armónico clásico de la misma energía.

Problema 4: Calcule $\langle\psi_o|e^{ig\hat{x}}\psi_o\rangle$ en el estado fundamental del oscilador armónico, siendo g una constante. Relacione este resultado con $\langle\psi_o|\hat{x}^2|\psi_o\rangle$.

Problema 5: Usando los operadores creación y aniquilación, $\hat{a}^\dagger$ y $\hat{a}$ respectivamente, el hamiltoniano de un oscilador armónico simple en una dimensión puede escribirse como

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) .$$

Considere que en $t = 0$ la función de onda de un oscilador está dada por

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\psi_2 ,$$

donde ψ_n es el n-ésimo autoestado de $\hat{H}$.

a) Determine la función de onda $\psi(t)$ para $t > 0$.

b) ¿Qué valores pueden obtenerse al realizar una medición de la energía de este sistema? ¿Cuáles son las correspondientes probabilidades?

c) Determine el valor de expectación de la energía.

d) Derive una expresión para los valores de expectación de la posición y el momento en función del tiempo.

e) ¿Es este un paquete de incertidumbre mínima? Justifique.

Problema 6: Para los autoestados ψ_m y ψ_n del oscilador armónico calcule $\langle\psi_m|\hat{a}^\dagger\psi_n\rangle$ y $\langle\psi_m|\hat{a}\psi_n\rangle$. Evalúe $\Delta x \cdot \Delta p$ para el estado ψ_n.

Problema 7: Dada una función de onda $\phi(t{=}0)$ *arbitraria* para el oscilador armónico unidimensional:

a) encuentre su evolución temporal;

b) calcule $\langle x\rangle_t$ en función del tiempo;

c) calcule $\langle p\rangle_t$ en función del tiempo;

d) verifique explícitamente el teorema de Ehrenfest $\left(\langle p\rangle_t = m\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle_t}{\mathrm{d}t}\right)$;

e) muestre que $\langle x\rangle_t = \langle x\rangle_o\cos(\omega t) + \dfrac{\langle p\rangle_o}{m\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)$.

Problema 8: *Estados coherentes.* Los autoestados del operador $\hat{a}$ se definen por la relación

$$\hat{a}\,\varphi_\alpha = \alpha\varphi_\alpha \quad ; \quad \text{donde } \alpha \text{ es un número complejo.}$$

a) Encuentre una expresión para los autoestados del operador $\hat{a}$ como combinación lineal de los autoestados ψ_n del oscilador armónico de masa m y frecuencia ω. Muestre que el operador $\hat{a}^\dagger$ no tiene autoestados.

b) Muestre que estos estados pueden escribirse como

$$\varphi_\alpha = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\exp\left(\alpha\,\hat{a}^\dagger\right)\psi_o = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 - \alpha^2\right)\right)\exp\left(-i\sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}}\alpha\hat{p}\right)\psi_o$$

c) Use los resultados del problema anterior para mostrar que estos estados son estados coherentes (de incertidumbre mínima) para los operadores posición y momento. Calcule la evolución temporal según el hamiltoniano del oscilador armónico para un estado coherente y para la relación de incertidumbre correspondiente. Compare con la evolución de un paquete de incertidumbre mínima para una partícula libre.

d) Muestre que la expresión de los estados coherentes en la representación coordenada está dada por la función de onda

$$\psi(x,t) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}\,e^{i\phi(t)}\exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}[x - q(t)]^2 + i\frac{p(t)x}{\hbar}\right\}$$

donde $p(t)$ y $q(t)$ son, respectivamente, el momento y la posición de un oscilador armónico clásico de masa m y frecuencia angular ω. Calcule el valor de ϕ sabiendo que $\psi(x,t)$ es solución de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico cuántico asociado.

e) Calcule el valor esperado de la energía del oscilador armónico y su dispersión para un estado coherente.