Mecánica Cuántica I

Guía 7: Momento angular orbital 16 de mayo de 2025

Problema 1: a) A partir de la definición del operador momento angular orbital cuántico, demuestre las relaciones de conmutación

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk}\,\hat{L}_k\ , \qquad [\hat{L}_i, \hat{x}_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk}\,\hat{x}_k\ , \qquad [\hat{L}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk}\,\hat{p}_k\ , \qquad [\hat{L^2}, \hat{L}_k] = 0 \qquad (k = x, y, z)\ .$$

Estas relaciones de conmutación se toman como propiedad básica de los momentos angulares, no solamente del momento angular orbital.

b) Utilizando las definiciones $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\,\hat{J}_y$ para cualquier momento angular, demuestre las relaciones

$$[\hat{J}^2,\, \hat{J}_\pm] = 0\ , \qquad [\,\hat{J}_+,\, \hat{J}_-] = 2\hbar\,\hat{J}_z\ , \qquad [\hat{J}_z,\, \hat{J}_\pm] = \pm\hbar\,\hat{J}_\pm\ ,$$

y también

$$\hat{J}_+\,\hat{J}_- = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hbar\,\hat{J}_z = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar\,\hat{J}_z \quad , \qquad \hat{J}_-\,\hat{J}_+ = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 - \hbar\,\hat{J}_z = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar\,\hat{J}_z \quad .$$

Problema 2: a) Escriba las componentes cartesianas del operador momento angular orbital $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\,\hat{\boldsymbol{r}}\times\nabla$ y las expresiones de los operadores $\hat{L}_+$, $\hat{L}_-$ y $\hat{L}^2$ en coordenadas esféricas.

b) Use que las autofunciones de $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$ tienen la forma $Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \Theta_{\ell,m}(\theta)\,e^{im\varphi}$ para encontrar Y_ℓ^ℓ, sabiendo que $\hat{L}_+\,Y_\ell^\ell = 0$. Muestre que todas las autofunciones de $\hat{L}^2$ pueden ser obtenidas de esta manera usando lo encontrado en el inciso **(a)**.

c) Suponga que ℓ puede tomar valores semienteros, calcule entonces $Y_{1/2}^{1/2}$ como se describe en el inciso **(b)**, y $Y_{1/2}^{-1/2}$ utilizando $\hat{L}_-$. Luego calcule $Y_{1/2}^{-1/2}$ a partir de la ecuación $\hat{L}_- Y_{1/2}^{-1/2} = 0$ y muestre que arroja resultados contradictorios. Esto puede tomarse como argumento de la ausencia de valores semienteros para el momento angular orbital.

Problema 3: Considere una partícula de masa μ restringida a moverse en una circunferencia de radio a. Muestre que $\hat{H} = \hat{L}_z^2/2\mu a^2$. Resuelva el problema de autovalores de $\hat{H}$ e interprete la degeneración de los mismos.

Problema 4: Analice las dispersiones de las componentes $\hat{J}_x$ y $\hat{J}_y$ para un autoestado $|j, m\rangle$ de los operadores $\hat{J}^2$ y $\hat{J}_z$. ¿Cuándo son mínimas o máximas?

Problema 5: Muestre que para un sistema en el autoestado $|\ell, m\rangle$ de los operadores $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$, el valor esperado de la componente del operador momento angular orbital a lo largo de una dirección $\boldsymbol{n}$ de ángulo polar θ es igual a $m\hbar\cos\theta$.

Problema 6: Sea $\hat{\Pi}$ el operador paridad dado por $(\hat{\Pi}\psi)(\boldsymbol{r}) = \psi(-\boldsymbol{r})$. Verifique, que en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) se tiene

$$(\hat{\Pi}\psi)(r, \theta, \phi) = \psi(r, \pi - \theta, \phi + \pi)$$

Muestre que $[\hat{\Pi}, \hat{\boldsymbol{L}}] = 0$ y, utilizando este resultado, que los armónicos esféricos Y_ℓ^m tienen paridad definida, la cual depende solo del número cuántico ℓ.

Problema 7: a) Conociendo que

$$\hat{L}_+|\ell, m\rangle_z = \hbar\sqrt{(\ell - m)(\ell + m + 1)}\ |\ell, m + 1\rangle_z$$

$$\hat{L}_-|\ell, m\rangle_z = \hbar\sqrt{(\ell + m)(\ell - m + 1)}\ |\ell, m - 1\rangle_z\ ,$$

utilice algún argumento para establecer que

$$\hat{J}_+|\ell, m_x\rangle_x = \hbar\sqrt{(\ell - m_x)(\ell + m_x + 1)}\ |\ell, m_x + 1\rangle_x$$

$$\hat{J}_-|\ell, m_x\rangle_x = \hbar\sqrt{(\ell + m_x)(\ell - m_x + 1)}\ |\ell, m_x - 1\rangle_x\ ,$$

donde $\hat{J}_\pm \equiv \hat{L}_y \pm i\hat{L}_z$ y $\hat{L}_x|\ell, m_x\rangle_x = \hbar m_x|\ell, m_x\rangle_x$.

b) Usando la acción de $L_\pm$ y $J_\pm$, calcule los productos de la forma ${}_z\langle 1, 1|1, m_x\rangle_x$.

Problema 8: Una partícula interactúa con un campo externo de manera tal que el Hamiltoniano está dado por

$$\hat{H} = \alpha\,\hat{L}_x\,; \qquad \alpha > 0,$$

En $t = 0$ su estado está dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|0,0\rangle_z + |1,1\rangle_z\Big)$$

donde el miembro de la derecha está expresado en términos de las autofunciones $|\ell, m\rangle_z$ comunes del par $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$. Utilizando la información obtenida en el problema anterior,

a) encuentre el espectro de energías para este hamiltoniano;

b) exprese ψ en la base $|\ell, m_x\rangle_x$ y calcule $\psi(t)$ para todo t;

c) calcule para todo tiempo las probabilidades de medir: energía cero, energía distinta de cero, $L_x = \hbar$ y $L_z = \hbar$.

Problema 9: Muestre que si $\psi(x,y,z) = f(r^2)\,g(x,y,z)$, entonces vale que $\hat{L}_j\psi = f\hat{L}_j g$ $(j = x,y,z)$, y por lo tanto también $\hat{L}_j^2\,\psi = f\,\hat{L}_j^2\,g$, y $\hat{L}^2\psi = f\,\hat{L}^2 g$.

Problema 10: Para un estado representado por la función de onda

$$\psi(x,y,z) = N e^{-\alpha r^2}(x+y)z\,, \quad \alpha > 0\,,$$

donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

a) determine la constante de normalización N en términos del parámetro α;

b) calcule los valores esperados y dispersiones de $\hat{\boldsymbol{L}}$ y de $\hat{L}^2$.
Sugerencia: use los resultados del problema anterior, y note que ψ es autoestado de $\hat{L}^2$.

Problema 11: **a)** Pruebe que los operadores $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{p}}$, $\hat{\boldsymbol{L}}$ actuando en $L^2(\mathbb{R}^3)$ son vectoriales y que $\hat{\boldsymbol{r}}^2$ y $\hat{\boldsymbol{p}}^2$ son operadores escalares.

b) Pruebe que si $\hat{\boldsymbol{A}}$ y $\hat{\boldsymbol{B}}$ son operadores vectoriales, entonces $\hat{\boldsymbol{A}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}$ es un operador escalar.

c) Pruebe que para que un operador $\hat{A}$ conmute con todas las componentes de $\hat{\boldsymbol{L}}$, es suficiente que conmute con dos de ellas.

Problema 12: *Representación matricial del momento angular.* Considere el caso en que $\ell = 1$.

a) Encuentre las matrices que representan a $\hat{L}^2, \hat{L}_z, \hat{L}_\pm, \hat{L}_x, \hat{L}_y$.

b) Use las matrices para escribir las relaciones de conmutación $[\hat{L}_i, \hat{L}_j]$, con $i,j = x,y,z$.

c) Verifique que $\hat{L}_z^3 = \hbar^2\hat{L}_z$.

***Problema 13:** *El oscilador armónico bidimensional.* Considere una partícula de masa μ que solo puede moverse en el plano x-y, bajo la acción de un potencial $V(x,y) = (\mu\omega^2/2)(x^2 + \alpha y^2)$ $\quad(\alpha > 0)$.

a) Encuentre las autofunciones y los autovalores para el hamiltoniano trabajando en coordenadas cartesianas.

b) Para $\alpha = 1$, muestre que $[H, L_z] = 0$ y reduzca el problema de autovalores de H al de la ecuación diferencial para la función de onda radial $R(r)$.

c) Examine la ecuación para $r \to 0$ y muestre que

$$R(r)\underset{r\to 0}{\longrightarrow} r^{|m|}$$

con m entero. Analizando el límite $r \to \infty$, verifique que puede escribirse

$$R(r) = r^{|m|}\exp(-\mu\omega r^2/2\hbar)u_m(r)\,.$$

d) Realizando las sustituciones $\epsilon = E/\hbar\omega$, $y = (\mu\omega/\hbar)^{1/2}r$, muestre que debe satisfacerse la siguiente ecuación diferencial:

$$u_m'' + \left[\left(\frac{2\,|m|+1}{y}\right) - 2y\right]u_m' + (2\epsilon - 2|m| - 2)u_m = 0\,.$$

e) Escribiendo $u_m(y) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell y^\ell$, halle la relación de recurrencia entre $C_{\ell+2}$ y C_ℓ. Demuestre que ℓ debe ser necesariamente par. Infiera entonces que los valores permitidos para la energía son $E_n = (n+1)\hbar\omega$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$

f) Para un dado n, ¿cuáles son los valores permitidos de $|m|$? A partir de esta información muestre que la degeneración del nivel n es $n+1$.

g) Escriba las autofunciones normalizadas completas para $n = 0, 1$.

* Opcional.