Mecánica Cuántica I

Guía 8: Movimiento en un potencial central — 5 de junio de 2025

Problema 1: Encuentre las autofunciones de una partícula libre en tres dimensiones. Compare las autofunciones basadas en el conjunto de observables $\hat{H}$, $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$, con las autofunciones de ondas planas, para las cuales el movimiento está caracterizado por los observables $\hat{H}$, $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$ y $\hat{p}_z$.

Problema 2: Determine la condición para los autovalores de un sistema tridimensional en pozo (central) de potencial

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Compare la ecuación resultante para estados S ($\ell = 0$) con la obtenida para el pozo unidimensional y escriba una condición de existencia para estados ligados. Determine una condición para existencia de estados ligados con $\ell > 0$.

Problema 3: Si $\hat{H}$ es la suma de un operador autoadjunto $\hat{H}_o$ y una "perturbación" definida positiva, con argumentos variacionales pruebe que la energía del estado fundamental de $\hat{H}_o$ está por debajo de la energía del estado fundamental de $\hat{H}$. Aplique este argumento para probar que en un potencial central el estado fundamental de una partícula ligada es un estado S ($\ell = 0$).

Problema 4: Considere un oscilador tridimensional isotrópico cuántico, es decir una partícula de masa μ sometida a un potencial radial $V(r) = \mu\omega^2 r^2/2$.

a) Resuelva la ecuación de Schrödinger en coordenadas cartesianas, mediante separación de variables. Verifique que los niveles de energía E_n , $n = 0, 1, 2, \ldots$, enumerados de modo que $E_0 < E_1 < E_2 \ldots$ tienen multiplicidad $(n+1)(n+2)/2$.

Para resolver ahora el problema en coordenadas esféricas, se propone la separación habitual $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\, Y_\ell^m(\theta, \varphi)$.

b) Analizando la ecuación radial para $r \to \infty$ y $r \to 0$ verifique que los comportamientos extremos sugieren la factorización

$$R(r) = r^\ell \exp\left(-\frac{\mu\omega}{2\hbar} r^2\right) f(r) \, .$$

¿Qué condiciones deben imponerse a $f(r)$?

c) Verifique que

$$R'(r) = R\left[\frac{\ell}{r} - \frac{\mu\omega r}{\hbar} + \frac{f'(r)}{f(r)}\right] ,$$

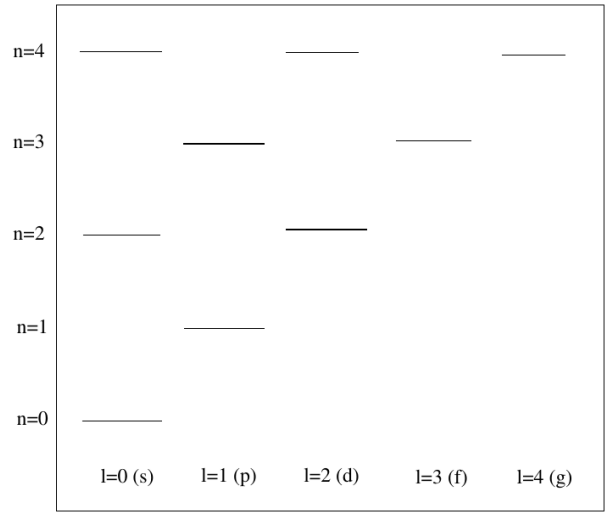
y encuentre una expresión similar para $R''(r)$. Muestre que la ecuación diferencial resultante permite identificar a $f(r)$ con polinomios asociados de Laguerre $L_k^{(\alpha)}(x)$, los que satisfacen la ecuación diferencial

$$x\, \frac{\mathrm{d}^2 L_k^{(\alpha)}(x)}{\mathrm{d}x^2} + (\alpha + 1 - x)\, \frac{\mathrm{d}L_k^{(\alpha)}(x)}{\mathrm{d}x} + k\, L_k^{(\alpha)}(x) = 0 \qquad (\text{con } \alpha \text{ real y } k \text{ entero}),$$

para lo cual es conveniente utilizar la energía reducida $\epsilon = 2E/\hbar\omega$ y hacer la sustitución $x = \mu\omega r^2/\hbar$, identificando luego $\alpha = \ell + 1/2$.

d) Escriba entonces los correspondientes autovalores para la energía y encuentre la correspondencia entre los números cuánticos del punto (a) y del (b) (vea la figura).

e) Para los dos autovalores más bajos de energía relacione las autofunciones halladas mediante los dos métodos. Escriba también la autofunción con $\ell = 2$, $m = 0$, cuya parte radial presenta un nodo como expansión de las correspondientes autofunciones en coordenadas cartesianas.



Problema 5: A partir de la definición de las componentes del momento angular orbital $\hat{L}_j = \varepsilon_{jk\ell}\, \hat{x}_k \hat{p}_\ell$ (sumando índices repetidos), demuestre que

$$\hat{L}^2 = r^2\hat{p}^2 - (\boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})^2 + i\hbar\, (\boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) \, .$$

Problema 6: Muestre que definiendo $\hat{p}_r \equiv -i\hbar \left(\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\right)$ se cumple $[\hat{r}, \hat{p}_r] = i\hbar\hat{I}$, de manera que puede arribarse a una relación similar a la clásica

$$\hat{\boldsymbol{p}}^2 = \hat{p}_r^2 + \frac{1}{r^2}\,\hat{L}^2 \ .$$

Problema 7: *Tratamiento analítico del problema del átomo hidrogenoide.* Suponga una partícula de carga e sometida a la energía potencial de atracción de Coulomb debida a una carga fija $+Ze$, es decir, $V(r) = -Ze^2/r$. Estudiamos los estados ligados, correspondientes a $E < 0$.

a) Verifique que la ecuación radial reducida para este problema es de la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}u^2(r)}{\mathrm{d}r^2} + \left(\frac{\hbar^2\,\ell(\ell+1)}{2\mu r^2} - \frac{Ze^2}{r}\right)u(r) = E\,u(r)$$

b) Estudie los límites $r \to 0$ y $r \to \infty$. Analice entonces para la solución general

$$u(\rho) = \rho^{\ell+1}\,e^{-\rho}\,w(\rho)\ , \qquad \text{donde} \quad \rho = \sqrt{\frac{-2\mu E}{\hbar^2}}\,r\ ,$$

qué condiciones deben imponerse a $w(\rho)$.

c) Verifique que la ecuación resultante para $w(\rho)$ es

$$\rho\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\rho^2} + 2(\ell+1-\rho)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\rho} + (\rho_o - 2\ell - 2)w = 0,$$

con $\rho_o = \sqrt{2\mu}Ze^2/(\sqrt{|E|}\hbar)$

d) Una alternativa para resolver la ecuación del inciso anterior es proponer

$$w(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\rho^k,$$

y buscar la relación entre sus coeficientes. Encuentre que esa relación de recurrencia es

$$a_{k+1} = a_k\frac{2(k+\ell+1) - \rho_o}{(k+1)(k+2\ell+2)}\ .$$

e) Analice nuevamente los límites asintóticos para ver que se tiene que cumplir la condición

$$\rho_o = 2(N+\ell+1)\ , \qquad \text{con} \quad N = 0, 1, 2, \ldots$$

f) Muestre que la energía resultante es

$$E_n = -\frac{Z^2\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}\ .$$

¿Qué dependencia tiene n con ρ_o, N y ℓ?

g) Obtenga explícitamente las funciones de onda radiales del átomo de hidrógeno para $n = 1, 2$ y 3. Grafíquelas.

Problema 8: Muestre que la suma de un pequeño término de la forma $1/r^2$ al potencial de Coulomb remueve la degeneración de los estados con diferente ℓ. Los niveles de energía aún están dados por una fórmula del tipo de Balmer, pero n difiere de un entero en una cantidad dependiente de ℓ.

Problema 9: Considere una partícula moviéndose en un potencial central de Yukawa o Coulomb apantallado:

$$V(r) = -V_o\frac{e^{-r/a}}{r/a}\ ,$$

con V_o, $a > 0$. Aplique el método variacional usando como función de prueba $R(r) = e^{-\beta r/a_o}$, con el parámetro β variable y a_o el radio de Bohr. Obtenga la mejor función de prueba de esta forma y deduzca una relación entre β y $2\mu V_o a^2/\hbar^2$ que permita garantizar un estado ligado. Evalúe β y calcule una cota superior a la energía fundamental para el valor de $2\mu V_o a^2/\hbar^2 = 2,7$.

¿Existe algún estado excitado ligado?

Muestre que en el límite del potencial de Coulomb ($V_o \to 0, a \to \infty, V_o\,a$ finito) se obtienen la energía y la función de onda correctas para el átomo de hidrógeno.