Mecánica Cuántica II

Guía 2: Suma de momentos angulares

22 de agosto de 2024

Problema 1: *Suma de dos espines 1/2.* Considere un sistema formado por dos partículas de espín $s=1/2$. El momento angular de espín total es $\hat{\boldsymbol{S}}=\hat{\boldsymbol{S}}_1+\hat{\boldsymbol{S}}_2$.

a) Verifique la relación $\hat{\boldsymbol{S}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_2=\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z}+\frac{1}{2}\big(\hat{S}_{1+}\hat{S}_{2-}+\hat{S}_{1-}\hat{S}_{2+}\big)$.

b) Compruebe que $[\hat{S}_z,\hat{S}_i^2]=0\,;\;\;[\hat{S}^2,\hat{S}_i^2]=0\,;\;\;[\hat{\boldsymbol{S}},\hat{\boldsymbol{S}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_2]=0$ ($\hat{\boldsymbol{S}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_2$ es un operador escalar) y que $[\hat{\boldsymbol{S}}_1,\hat{S}^2]=2i\hbar\,(\hat{\boldsymbol{S}}_2\times\hat{\boldsymbol{S}}_1)$. En particular, $[\hat{S}_{iz},\hat{S}^2]\neq 0$.

c) Muestre que *en la base producto* la matriz correspondiente al operador $\hat{S}^2$ está dada por

$$\hat{S}^2=\hbar^2\;\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} |{+}{+}\rangle & |{+}{-}\rangle & |{-}{+}\rangle & |{-}{-}\rangle \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array}\;,$$

donde los símbolos de la fila superior rotulan los autoestados correspondientes a pares de autovalores $m_{1z}m_{2z}$: por ejemplo, $|{+}{-}\rangle$ significa $\left|\frac{1}{2}\right\rangle\otimes\left|-\frac{1}{2}\right\rangle\equiv\left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle$ en donde $m_{1z}=1/2$, $m_{2z}=-1/2$).
Escriba también las matrices $\hat{S}_z$, $\hat{S}_+$ y $\hat{S}_-$ en esta base.

d) Muestre que la matriz de $\hat{S}^2$ calculada en el punto anterior resulta diagonal si en el autoespacio de $\hat{S}_z$ para el autovalor 0 se toman como vectores base

$$\frac{|{+}{-}\rangle+|{-}{+}\rangle}{\sqrt{2}}\quad(s=1)\;,\qquad\qquad \frac{|{+}{-}\rangle-|{-}{+}\rangle}{\sqrt{2}}\quad(s=0)\;.$$

Problema 2: Considere un sistema formado por dos partículas de espín $s=1/2$ acopladas por la interacción dipolar magnética,

$$\hat{H}=-\frac{\mu_o}{4\pi}\,\frac{\gamma_1\gamma_2}{r_{12}^3}\left[3(\hat{\boldsymbol{S}}_1\cdot\boldsymbol{e}_{12})(\hat{\boldsymbol{S}}_2\cdot\boldsymbol{e}_{12})-\hat{\boldsymbol{S}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_2\right]\;,$$

donde $\hat{\boldsymbol{e}}_{12}$ es un vector unitario en la dirección del eje que une las posiciones de las partículas 1 y 2 (puede tomarse en la dirección z por simplicidad), r_{12} es la distancia entre las partículas, γ_1 y γ_2 son las respectivas razones giromagnéticas y μ_o es la permeabilidad magnética en el vacío.

a) Muestre que los autoestados del hamiltoniano son los estados singlete y triplete.

b) Calcule las energías de los distintos estados.

c) Suponga que a este sistema se le aplica un campo magnético $\boldsymbol{B}=B_o\hat{\boldsymbol{e}}_{12}$. Calcule los nuevos autoestados y autoenergías en función de B_o para el caso en que las razones giromagnéticas γ_1 y γ_2 son iguales. Grafique e indique para qué valor de B_o existe una transición en el estado fundamental de $\hat{H}$.

Problema 3: Considere dos partículas de espín 1/2 cuya interacción está representada mediante el hamiltoniano $\hat{H}=-\kappa\hat{\boldsymbol{M}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{M}}_2$, donde $\hat{\boldsymbol{M}}_i=\gamma_i\hat{\boldsymbol{S}}_i$.

a) Calcule los conmutadores $[\hat{H},\hat{\boldsymbol{S}}]$, $[\hat{H},\hat{\boldsymbol{S}}_1]$, $[\hat{H},\hat{\boldsymbol{S}}_2]$. ¿Qué información nos da esto?

b) Encuentre la ecuación de movimiento para los valores de expectación de los momentos angulares $\hat{\boldsymbol{S}}_i$ de cada partícula y del momento angular total de espín $\hat{\boldsymbol{S}}=\hat{\boldsymbol{S}}_1+\hat{\boldsymbol{S}}_2$.

c) Repita el inciso anterior para los valores de expectación de los momentos magnéticos $\hat{\boldsymbol{M}}_i$ y del momento magnético total $\hat{\boldsymbol{M}}=\hat{\boldsymbol{M}}_1+\hat{\boldsymbol{M}}_2$. ¿Qué cambia entre ambos incisos?

Problema 4: Sean $\hat{\boldsymbol{S}}_1$ y $\hat{\boldsymbol{S}}_2$ dos espines de magnitud $s=1/2$.

a) Muestre que los operadores $\hat{P}_1=\frac{3}{4}\hat{I}+\big(\hat{\boldsymbol{S}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_2\big)/\hbar^2$ y $\hat{P}_0=\frac{1}{4}\hat{I}-\big(\hat{\boldsymbol{S}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_2\big)/\hbar^2$ cumplen $\hat{P}_i\hat{P}_j=\delta_{ij}\hat{P}_j$.

b) Muestre que un estado arbitrario se proyecta con P_1 y P_o en los autoespacios de $\hat{S}^2$ asociados con j total igual a 1 y 0, respectivamente.

Problema 5: **a)** Identifique los coeficientes de Clebsch-Gordan en el problema 1.

b) Calcule los coeficientes de Clebsch-Gordan para el caso de suma de un espín 1/2 con un espín 1.

Problema 6: El protón es una partícula elemental de espín 1/2. Su momento magnético intrínseco $\hat{\boldsymbol{M}} = \gamma_p \hat{\boldsymbol{S}}$ es proporcional al espín, y la razón giromagnética γ_p es igual a $g_p\mu_n/\hbar$, con $\mu_n = e\hbar/(2m_p)$ (magnetón nuclear) y $g_p \approx 5,585$. La interacción espín-espín entre dos protones es proporcional al producto de sus momentos magnéticos, $\hat{H} = -\kappa_{12}\, \hat{\boldsymbol{M}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{M}}_2$, donde la constante de proporcionalidad depende de la distancia entre los protones, de su estado orbital, etc.

Considere tres protones equivalentes, por ejemplo los tres protones en una molécula de amoníaco, con $\kappa_{12} = \kappa_{13} = \kappa_{23}$ en un campo magnético externo estático $\boldsymbol{B}$.

a) Escriba el hamiltoniano espín-magnético del sistema teniendo en cuenta solamente la interacción con el campo magnético y las interacciones espín-espín.

b) Verifique que $\hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2 + \hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_3 + \hat{\boldsymbol{S}}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_3$ es un operador escalar con respecto al espín total del sistema.

c) Obtenga los autovalores del hamiltoniano y los autovectores correspondientes expresándolos en términos de la base ortonormal desacoplada $\left\{ \left|\tfrac{1}{2}, m_1\right\rangle \otimes \left|\tfrac{1}{2}, m_2\right\rangle \otimes \left|\tfrac{1}{2}, m_3\right\rangle \equiv \left|\tfrac{1}{2}, m_1; \tfrac{1}{2}, m_2; \tfrac{1}{2}, m_3\right\rangle \,:\, m_1, m_2, m_3 = \pm\tfrac{1}{2} \right\}$. Grafique el espectro en función de la magnitud del campo magnético y discuta la multiplicidad de las energías.

Problema 7: *Espín y momento angular orbital.* Considere una partícula en $\mathbb{R}^3$ que posee momento angular de espín de magnitud $s = 1/2$ y momento angular orbital de magnitud ℓ.

a) Construya los operadores de proyección $\hat{P}_\pm$ para los subespacios $j = \ell \pm 1/2$ correspondientes a la suma $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$.

b) Utilizando el punto anterior, calcule el coeficiente
$$\left\langle \ell, \frac{1}{2}; m \mp \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \,\middle|\, \ell, \frac{1}{2}; \ell \pm \frac{1}{2}, m \right\rangle ,$$
donde la notación es $\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2; j, m\rangle$, con m el número cuántico magnético asociado a $\hat{J}_z$. Es común abreviar la notación removiendo j_1 y j_2 del lado derecho, $\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j, m\rangle$, ya que esta información está del lado izquierdo también.

Problema 8: Calcule las matrices de rotación de Wigner $D^{(j)}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)$ para $j = 1/2$ y $j = 1$.

Problema 9: *Tensores esféricos irreducibles.*

a) Calcule las componentes esféricas del tensor de rango 1, $U^{(1)}_q$, $q = s\pm 1, 0$ que corresponden a un operador vectorial con componentes cartesianas dadas por $\hat{\boldsymbol{U}} = (\hat{U}_x, \hat{U}_y, \hat{U}_z)$.

b) Muestre que el producto escalar de dos operadores vectoriales en componentes esféricas toma la forma
$$\hat{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{K}} = \hat{J}_0 \hat{K}_0 - \hat{J}_- \hat{K}_+ - \hat{J}_+ \hat{K}_-$$

c) Dado el operador construido como $\hat{S}_{1,z}\, \hat{S}_{2,z}$, donde $\hat{S}_{i,z}$ es la componente z de un operador de espín $\hat{\boldsymbol{S}}_i$, descompóngalo en términos de operadores irreducibles. ¿Qué rangos entran en esta descomposición?

Problema 10: Considere un sistema formado por dos partículas de espín s=1/2 acopladas por interacción dipolar magnética
$$\hat{H} = -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\gamma_1\gamma_2}{r_{12}^3} \left[3(\hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{12})(\hat{\boldsymbol{S}}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{12}) - \hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2 \right].$$
A diferencia del Problema 1, suponga ahora que el vector unitario $\hat{\boldsymbol{e}}_{12}$ (en la dirección del eje que une las posiciones de las partículas 1 y 2) no está en la dirección de cuantización sino en una dirección arbitraria. Escriba el hamiltoniano en términos de tensores esféricos irreducibles.

Problema 11: *Transiciones dipolares.* Considere una partícula en un potencial central y sean $\psi_{n,\ell,m}(\boldsymbol{r}) = R_{n,\ell}(r)\, Y^m_\ell(\theta, \phi)$ las autofunciones del hamiltoniano (con $R_{n,\ell}$ autofunciones del problema radial, e Y^m_ℓ el m-ésimo armónico esférico de orden ℓ). Encuentre cuáles transiciones dipolares están *prohibidas*, hallando para cuáles estados se anula el elemento de matriz
$$\langle \psi_{n',\ell',m'} |\, \boldsymbol{r}\, | \psi_{n,\ell,m} \rangle \ .$$

Problema 12: Considere una partícula de masa μ confinada a moverse en la superficie de una esfera de radio R.

a) Muestre que los autoestados simultáneos $|l, m\rangle$ de los operadores $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ y $\hat{L}_z$, con $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ el operador momento angular orbital, son también autoestados del Hamiltoniano del sistema. Calcule los niveles de energía y su degeneración.

b) Considere el elemento de matriz $\chi = \langle 1, 1|\, \hat{x}\hat{p}_y\, |1, -1\rangle$. Calcule, en función de χ, los elementos $\langle 1, m|\, \hat{y}\hat{p}_x\, |1, 1\rangle$. *Ayuda*: Puede ser útil mostrar que $\hat{r}^{(1)}_{+1}\hat{p}^{(1)}_{-1} - \hat{r}^{(1)}_{-1}\hat{p}^{(1)}_{+1} \propto \hat{L}_z$.

Problema 13: *Factores de Landé.* Considere el momento angular total $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{J}}_1 + \hat{\boldsymbol{J}}_2$, suma de dos momentos angulares $\hat{\boldsymbol{J}}_1$ y $\hat{\boldsymbol{J}}_2$ irreducibles de magnitud j_1 y j_2 , respectivamente. Sea $\{|\alpha, j, m, j_1, j_2\rangle\}$ la base ortonormal asociada con el par $(\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_z)$ donde el índice α señala otros grados de libertad no asociados con $\hat{\boldsymbol{J}}_1$ y $\hat{\boldsymbol{J}}_2$.

a) Demuestre que $\hat{\boldsymbol{K}} = a\,\hat{\boldsymbol{J}}_1 + b\,\hat{\boldsymbol{J}}_2$ es un operador vectorial con respecto a $\hat{\boldsymbol{J}}$ para cualquier par de números reales a y b.

b) Demuestre que $\langle \alpha j, m; j_1, j_2 \mid \hat{\boldsymbol{K}} \mid \alpha j, m'; j_1, j_2 \rangle = g(j; j_1, j_2)\, \langle \alpha j, m; j_1, j_2 \mid \hat{\boldsymbol{J}} \mid \alpha j, m'; j_1, j_2 \rangle$.

c) Verifique que $2\,\hat{\boldsymbol{J}}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}_1 = \hat{\boldsymbol{J}}^2 + \hat{J}_1^2 - \hat{J}_2^2$ y que $2\,\hat{\boldsymbol{J}}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}_2 = \hat{J}^2 + \hat{J}_2^2 - \hat{J}_1^2$. Luego demuestre que

$$\hat{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{K}} = \frac{a+b}{2}\hat{J}^2 + \frac{a-b}{2}\left(\hat{J}_1^2 - \hat{J}_2^2\right) .$$

d) Demuestre que para $j \neq 0$ (el caso $j=0$ es trivial)

$$g(\alpha, j; j_1, j_2) = G(\alpha)\frac{(a+b)j(j+1) + (a-b)\big[j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)\big]}{2j(j+1)} .$$

e) Obtenga el factor de Landé para el efecto Zeeman de un electrón ($a=2$, $b=1$, $\hat{\boldsymbol{J}}_1 = \hat{\boldsymbol{S}}$ y $\hat{\boldsymbol{J}}_2 = \hat{\boldsymbol{L}}$).

Utilice el inciso anterior para encontrar la energía de interacción del momento magnético de un átomo con un campo magnético externo $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{e}}_z$. En este caso $\hat{\boldsymbol{\mu}} = -\mu_{\mathrm{B}}(g_L\hat{\boldsymbol{L}} + g_S\hat{\boldsymbol{S}})/\hbar$ es el momento magnético total (angular orbital y de espín) y los autoestados son caracterizados por los números cuánticos n, l, s, j, m. Muestre que la aplicación del campo magnético remueve completamente la degeneración de los autoestados. Para ello, calcule la separación de los niveles de energía en términos del factor de Landé g_J, tomando $g_L = 1$ y $g_S = 2$. ¿Qué diferencia encuentra con el Efecto Zeeman convencional?

Problema 14: a) Verifique el siguiente coeficiente de Clebsch-Gordan (aquí la notación es $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle$):

$$\langle j1j0|j1jj\rangle = \sqrt{\frac{j}{j+1}} .$$

b) Utilice el teorema de Wigner-Eckart para demostrar que:

$$\langle \alpha j' \| \mathbf{J} \| \alpha j\rangle = \sqrt{j(j+1)}\,\hbar\,\delta_{jj'} .$$