Mecánica Cuántica II

Guía 4: Perturbaciones estacionarias 3 de octubre 2024

Problema 1: Un oscilador armónico en una dimensión, de masa m, carga q y frecuencia ω es sometido a la acción de un campo eléctrico constante de intensidad $\mathcal{E}$ en la dirección x positiva.

a) Considere el término de campo en el hamiltoniano como una perturbación y estudie las correcciones a los niveles de energía hasta segundo orden.

b) Este problema puede resolverse en forma exacta: calcule las energías y compárelas con las obtenidas en **a).**

Problema 2: Para el oscilador anarmónico unidimensional con potencial

$$V(\hat{x}) = \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 + a\hat{x}^3 + b\hat{x}^4 \ ,$$

calcule las correcciones a las autoenergías del oscilador armónico asociado, considerando hasta orden 1 en el término cuártico y orden 2 en el cúbico.

Sugerencia: Trabaje en términos de los operadores de aniquilación y creación del oscilador armónico recordando

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) = \frac{x_o}{\sqrt{2}}\,(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \qquad \hat{p}_x = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}x_o}\,(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

$$\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\;|n+1\rangle \quad , \quad \hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\;|n-1\rangle \quad ; \quad \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = \hat{I} \quad ; \quad \hat{n}\,|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle = n\,|n\rangle$$

Problema 3:

a) Considere el operador $\hat{H} = \hat{H}_o + \epsilon\,\hat{W}$ donde su representación matricial en alguna base ortonormal de $\mathbb{C}^3$ es de la forma

$$\boldsymbol{H}_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ ; \quad \boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ \bar{a} & \bar{b} & c \end{pmatrix} ,$$

donde a y b son complejos arbitrarios y c es real. Determine los autovalores de $\hat{H}$ a segundo orden en ϵ.

b) Repita el inciso anterior suponiendo ahora que:

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ \bar{a} & \bar{b} & c \end{pmatrix} .$$

Problema 4: Considere dos partículas *distinguibles* de espín 1/2 cuya interacción espín-espín es anisotrópica:

$$\hat{H}_o \ = \ -\frac{J}{\hbar^2}\,(\hat{S}_{1x}\,\hat{S}_{2x} + \hat{S}_{1y}\,\hat{S}_{2y}) - \frac{J_o}{\hbar^2}\,\hat{S}_{1z}\,\hat{S}_{2z} \ ,$$

con $J > 0$ y $J_o > 0$, y defina el parámetro de anisotropía $\Delta \equiv J_o - J$.

a) ¿Es el hamiltoniano un operador escalar respecto al espín total del sistema?

b) Obtenga los autovalores del hamiltoniano y grafíquelos en función del parámetro de anisotropía, señalando la degeneración correspondiente.

c) Escriba los correspondientes autovectores como combinación lineal de la base producto directo o desacoplada.

d) Considere ahora una anisotropía débil en el plano x-y:

$$\hat{H} = \hat{H}_o - \epsilon\;\hat{S}_{1x}\,\hat{S}_{2x}$$

con $\epsilon > 0$. Calcule la corrección a la energía hasta segundo orden en ϵ y verifique que a primer orden la estimación resulta exacta. Haga un gráfico de energías vs. ϵ a J, Δ fijos. Comente sobre la validez del resultado perturbativo.

e) ¿Cuáles son los resultados perturbativos si las dos partículas son idénticas y de espín 1?

Problema 5: Un modelo simple que describe al protón en un átomo de hidrógeno no como un punto sino como una carga con una distribución espacial, propone que el protón se represente como carga uniformemente distribuida en una esfera de radio r_o. En este caso el potencial al que es sometido el electrón es

$$V(r) = \begin{cases} -Ze^2/r & , \ \text{si } r \geq r_o \\ \dfrac{Ze^2}{2r_o}\left[\left(\dfrac{r}{r_o}\right)^2 - 3\right] & , \ \text{si } r \leq r_o \end{cases} ,$$

donde Ze es la carga nuclear ($Z = 1$ para el hidrógeno).

a) Sin calcularla explícitamente, exprese la corrección a primer orden en Z de los niveles de energía del electrón en este potencial con respecto al potencial coulombiano simple.

b) Obtenga correcciones aproximadas suponiendo que las funciones de onda radiales del problema coulombiano pueden aproximarse en la esfera de radio r_o por su valor en $r = 0$. Discuta esta aproximación en términos del parámetro $r_o/a_o(Z)$ donde $a_o(Z)$ es el radio de Bohr asociado al problema $a_o(Z) = \hbar^2/(Zme^2)$ [Para el protón, r_o es del orden de 10^{-14} m].

Problema 6: *Efecto Stark cuadrático.* Un átomo hidrogenoide, cuyo estado fundamental es no degenerado (ignoramos el espín), se lo coloca en un campo eléctrico uniforme de intensidad $\mathcal{E}$ en la dirección z.

a) Estime el corrimiento de energía del estado fundamental a segundo orden en $\mathcal{E}$. Para ello establezca cotas inferior y superior para $|\Delta E^{(2)}_{1,0,0}|$.

b) Encuentre una expresión para el momento dipolar eléctrico del estado fundamental en términos de $\Delta E^{(2)}_{1,0,0}$, considerando el valor de expectación de $e\hat{z}$ con el estado corregido a primer orden.

Problema 7: Considere dos bosones idénticos de espín 1 con momentos magnéticos $\hat{\boldsymbol{M}}_j = \gamma \hat{\boldsymbol{S}}_j$ $(j = 1, 2)$. La interacción directa entre estos dos momentos es $-(J/\hbar^2)\hat{\boldsymbol{M}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{M}}_2$ donde la constante J es positiva.

a) Determine el hamiltoniano del sistema en un campo magnético estático y uniforme de magnitud B (>0) ignorando los grados de libertad mecánicos. ¿Cuáles son las simetrías o constantes de movimiento del sistema para $B = 0$, y $B \neq 0$?

b) Determine las autoenergías y sus multiplicidades en función de B. Grafique cualitativamente.

c) Suponga ahora que los espines interactúan además con un término adicional $(\Delta/\hbar^2)\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z}$ con $\Delta > 0$. Calcule las autoenergías a primer orden en Δ.