

Problema 1: Considere el problema de un espín $1/2$ en un campo magnético externo dependiente del tiempo $\mathbf{B} = (B \cos(\omega t), -B \sin(\omega t), B_0)$. Si el estado inicial $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$ es un autovector normalizado de S_z con autovalor $\hbar/2$:

- calcule la probabilidad de transición al estado $|\beta\rangle$, correspondiente al autovector de S_z con autovalor $-\hbar/2$;
- encuentre esta probabilidad usando teoría de perturbaciones a primer orden en la magnitud B del campo y compare con el resultado exacto.

Problema 2: Considere un problema 1D en el que una partícula se encuentra en el estado fundamental de una caja de largo L . Si la caja se expande simétricamente al doble de su tamaño en forma instantánea, ¿cuál es la probabilidad de encontrar la partícula en el estado fundamental de la nueva caja?

Problema 3: Un sistema se somete a una perturbación $\hat{V}(t) = \hat{V}\delta(t)$. Muestre que si en $t=0^-$ el sistema está en el autoestado $|\alpha\rangle$ del hamiltoniano no perturbado, la amplitud de probabilidad de encontrarlo en el autoestado $|\beta\rangle$ en $t=0^+$ es, a primer orden,

$$d_\alpha = -\frac{i}{\hbar} \langle \beta | \hat{V} | \alpha \rangle \quad (\alpha \neq \beta)$$

Note que, aun cuando la perturbación es ‘infinita’ en $t=0$, podemos seguir usando la teoría de perturbaciones de primer orden, si el área (bajo la perturbación) es suficientemente pequeña.

Problema 4: a) Muestre que en el caso general la ecuación de Schrödinger para el operador evolución temporal puede escribirse

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_i) = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_i),$$

Escriba la solución formal para el operador $U(t, t_i)$ en los siguientes casos:

- $\hat{H}$ es independiente del tiempo;
- $\hat{H}$ depende del tiempo y $[\hat{H}(t), \hat{H}(t')] = 0$, es decir los $\hat{H}$'s a distintos tiempos conmutan entre ellos;
- $\hat{H}$ depende del tiempo y $[\hat{H}(t), \hat{H}(t')] \neq 0$.

Problema 5: Dado un sistema arbitrario perturbado de tal manera que su hamiltoniano es $\hat{H}(t) = \hat{H}_o(t) + \hat{V}(t)$, el vector de estado del sistema en la representación interacción (o de Dirac), $|\psi(t)\rangle_I$ está definido a partir del vector de estado en la representación de Schrödinger $|\psi(t)\rangle$ como

$$|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}_o^\dagger(t, t_i) |\psi(t)\rangle,$$

donde el operador evolución $\hat{U}_o(t, t_i)$ satisface la ecuación

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_o(t, t_i) = \hat{H}_o \hat{U}_o(t, t_i).$$

- Muestre que la evolución de $|\psi(t)\rangle_I$ está dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I = \hat{V}_I(t) |\psi(t)\rangle_I,$$

donde $\hat{V}_I(t)$ es el operador transformado de $\hat{V}(t)$ según

$$\hat{V}_I(t) = \hat{U}_o^\dagger(t, t_i) \hat{V}(t) \hat{U}_o(t, t_i).$$

Explique cualitativamente por qué cuando la perturbación $\hat{V}(t)$ es mucho más chica que $\hat{H}_o(t)$, el movimiento del vector $|\psi(t)\rangle_I$ es mucho más lento que el de $|\psi(t)\rangle$.

- Muestre que la ecuación diferencial anterior es equivalente a la ecuación integral

$$|\psi(t)\rangle_I = |\psi(t_i)\rangle_I + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_i}^t dt' \hat{V}_I(t') |\psi(t')\rangle_I,$$

donde $|\psi(t_i)\rangle_I = |\psi(t_i)\rangle$.

- c) Resolviendo esta ecuación integral iterativamente, muestre que el ket $|\psi(t)\rangle_I$ puede ser expandido en serie de potencias en $\hat{V}$ de la forma:

$$|\psi(t)\rangle_I = \left[\hat{I} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_i}^t dt' \hat{V}_I(t') + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_i}^t dt' \hat{V}_I(t') \int_{t_i}^{t'} dt'' \hat{V}_I(t'') + \dots \right] |\psi(t_i)\rangle_I .$$

Problema 6: Considere un átomo de hidrógeno en un campo eléctrico

$$\mathcal{E} = (0, 0, \mathcal{E}(t)), \quad \text{con} \quad \mathcal{E}(t) = \frac{A\tau}{\pi e} \frac{1}{t^2 + \tau^2},$$

donde A y τ son constantes positivas (τ es el semiancho a la mitad del valor máximo). Suponga que para $t \rightarrow -\infty$ el átomo está en el estado fundamental y calcule, al orden más bajo no nulo, la probabilidad de transición a un estado $2p$ para $t \rightarrow \infty$.

Problema 7: Un átomo de hidrógeno se encuentra en su estado fundamental en $t = -\infty$ y se aplica un campo eléctrico $\mathcal{E} = (\mathcal{E}\hat{k}) \exp(-t^2/\tau^2)$ hasta $t = \infty$. Muestre que la probabilidad de que el átomo de hidrógeno termine en alguno de los estados $n=2$ es, hasta primer orden,

$$P(n=2) = \left(\frac{e\mathcal{E}}{\hbar} \right)^2 \frac{2^{15}a_0^2}{3^{10}} \pi\tau^2 \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{2}\right),$$

donde $\hbar\omega = (E_{2\ell m} - E_{100})$. ¿Cambia la respuesta si se incorpora el espín a la descripción?

Problema 8: Un oscilador está en el estado fundamental de $\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1$, donde la perturbación independiente del tiempo $\hat{H}^1$ corresponde al potencial lineal $-fx$. Si en $t=0$, $\hat{H}^1$ se apaga abruptamente, se quiere demostrar que la probabilidad de que el sistema esté en el autoestado n -ésimo de $\hat{H}^0$ estará dada por la distribución de Poisson

$$P(n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, \quad \text{donde} \quad \lambda = \frac{f^2}{2m\omega^3\hbar}.$$

Problema 9: Considere un hamiltoniano $\hat{H}_0$ cuyos autoestados n -ésimo y m -ésimo, $|\phi_n\rangle$ y $|\phi_m\rangle$, tienen energías $E_n^{(0)}$ y $E_m^{(0)}$ respectivamente. A este hamiltoniano se suma una perturbación periódica de la forma $\hat{V}(t) = V_0(\hat{F}e^{-i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{i\omega t})$, cuya frecuencia es tal que $E_m^{(0)} - E_n^{(0)} = \hbar(\omega + \epsilon)$, donde $|\epsilon| \ll \omega$, y el operador $\hat{F}$ es independiente del tiempo.

- Estime la probabilidad de transición de $|\phi_n\rangle$ a $|\phi_m\rangle$ al cabo de un tiempo t y a orden V_0^2 .
- Muestre que si se considera el estado inicial $|\phi_m\rangle$ y el final $|\phi_n\rangle$, la probabilidad de transición es la misma.
- Analice cuándo es esperable que el resultado perturbativo sea correcto, y cuándo no puede serlo. En particular, considere los casos de tiempos cortos y largos, y los casos $\epsilon = 0$ y $|\epsilon| \gg |V_0/\hbar|$.
- Muestre que si $\omega \gg |\epsilon|$, entonces uno de los dos términos dentro de la integral para la probabilidad de transición es despreciable frente al otro.
- Considere un ejemplo típico en un problema de un láser actuando sobre una transición entre dos niveles atómicos: asuma que la diferencia de energía entre los dos niveles corresponde a una longitud de onda de 700 nm, que $\epsilon = 2\pi \times 100$ GHz, y $V_0/\hbar = 2\pi \times 10$ GHz.

- Verifique que vale $\omega \gg |V_0/\hbar|$, lo cual es necesario para poder aplicar teoría de perturbaciones.
- Compare el orden de magnitud de los dos términos de la integral mencionados en el ítem **d**.
- Estime la máxima probabilidad de transición de un nivel al otro.