Mecánica Cuántica II

Guía 5: Perturbaciones dependientes del tiempo — 22 de octubre 2024

Problema 1: Considere el problema de un espín 1/2 en un campo magnético externo dependiente del tiempo $\boldsymbol{B} = \big(B\cos(\omega t), -B\,\mathrm{sen}(\omega t), B_o\big)$. Si el estado inicial $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$ es un autovector normalizado de S_z con autovalor $\hbar/2$:

a) calcule la probabilidad de transición al estado $|\beta\rangle$, correspondiente al autovector de S_z con autovalor $-\hbar/2$;

b) encuentre esta probabilidad usando teoría de perturbaciones a primer orden en la magnitud B del campo y compare con el resultado exacto.

Problema 2: Considere un problema 1D en el que una partícula se encuentra en el estado fundamental de una caja de largo L. Si la caja se expande simétricamente al doble de su tamaño en forma instántanea, ¿cuál es la probabilidad de encontrar la partícula en el estado fundamental de la nueva caja?

Problema 3: Un sistema se somete a una perturbación $\hat{V}(t) = \hat{V}\delta(t)$. Muestre que si en $t{=}0^-$ el sistema está en el autoestado $|\alpha\rangle$ del hamiltoniano no perturbado, la amplitud de probabilidad de encontrarlo en el autoestado $|\beta\rangle$ en $t{=}0^+$ es, a primer orden,

$$d_\alpha = -\frac{i}{\hbar}\langle\beta|\hat{V}|\alpha\rangle \qquad\qquad (\alpha \neq \beta)$$

Note que, aun cuando la perturbación es 'infinita' en $t = 0$, podemos seguir usando la teoría de perturbaciones de primer orden, si el área (bajo la perturbación) es suficientemente pequeña.

Problema 4: **a)** Muestre que *en el caso general* la ecuación de Schrödinger para el operador evolución temporal puede escribirse

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,t_i) = \hat{H}(t)\,\hat{U}(t,t_i),$$

Escriba la solución formal para el operador $U(t,t_i)$ en los siguientes casos:

b) $\hat{H}$ es independiente del tiempo;

c) $\hat{H}$ depende del tiempo y $\big[\hat{H}(t), \hat{H}(t')\big] = 0$, es decir los $\hat{H}$'s a distintos tiempos conmutan entre ellos;

d) $\hat{H}$ depende del tiempo y $\big[\hat{H}(t), \hat{H}(t')\big] \neq 0$.

Problema 5: Dado un sistema arbitrario perturbado de tal manera que su hamiltoniano es $\hat{H}(t) = \hat{H}_o(t) + \hat{V}(t)$, el vector de estado del sistema en la representación interacción (o de Dirac), $|\psi(t)\rangle_I$ está definido a partir del vector de estado en la representación de Schrödinger $|\psi(t)\rangle$ como

$$|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}_o^\dagger(t,t_i)\;|\psi(t)\rangle\;,$$

donde el operador evolución $\hat{U}_o(t,t_i)$ satisface la ecuación

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_o(t,t_i) = \hat{H}_o\,\hat{U}_o(t,t_i).$$

a) Muestre que la evolución de $|\psi(t)\rangle_I$ está dada por

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(t)\rangle_I = \hat{V}_I(t)\;|\psi(t)\rangle_I\;,$$

donde $\hat{V}_I(t)$ es el operador transformado de $\hat{V}(t)$ según

$$\hat{V}_I(t) = \hat{U}_o^\dagger(t,t_i)\,\hat{V}(t)\,\hat{U}_o(t,t_i).$$

Explique cualitativamente por qué cuando la perturbación $\hat{V}(t)$ es mucho más chica que $\hat{H}_o(t)$, el movimiento del vector $|\psi(t)\rangle_I$ es mucho más lento que el de $|\psi(t)\rangle$.

b) Muestre que la ecuación diferencial anterior es equivalente a la ecuación integral

$$|\psi(t)\rangle_I = |\psi(t_i)\rangle_I + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_i}^{t}\mathrm{d}t'\;\hat{V}_I(t')\;|\psi(t')\rangle_I\;,$$

donde $|\psi(t_i)\rangle_I = |\psi(t_i)\rangle$.

c) Resolviendo esta ecuación integral iterativamente, muestre que el ket $|\psi(t)\rangle_I$ puede ser expandido en serie de potencias en $\hat{V}$ de la forma:

$$|\psi(t)\rangle_I = \left[\hat{I} + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_i}^{t} \mathrm{d}t'\ \hat{V}_I(t') + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{t_i}^{t} \mathrm{d}t'\ \hat{V}_I(t') \int_{t_i}^{t'} \mathrm{d}t''\hat{V}_I(t'') + \dots\right] |\psi(t_i)\rangle_I \ .$$

Problema 6: Considere un átomo de hidrógeno en un campo eléctrico

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = (0, 0, \mathcal{E}(t)), \qquad \text{con} \qquad \mathcal{E}(t) = \frac{A\tau}{\pi e}\,\frac{1}{t^2+\tau^2},$$

donde A y τ son constantes positivas (τ es el semiancho a la mitad del valor máximo). Suponga que para $t \to -\infty$ el átomo está en el estado fundamental y calcule, al orden más bajo no nulo, la probabilidad de transición a un estado $2p$ para $t \to \infty$.

Problema 7: Un átomo de hidrógeno se encuentra en su estado fundamental en $t=-\infty$ y se aplica un campo eléctrico $\boldsymbol{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}\hat{k})\exp\left(-t^2/\tau^2\right)$ hasta $t=\infty$. Muestre que la probabilidad de que el átomo de hidrógeno termine en alguno de los estados $n=2$ es, hasta primer orden,

$$P(n=2) = \left(\frac{e\mathcal{E}}{\hbar}\right)^2 \frac{2^{15}a_o^2}{3^{10}}\,\pi\tau^2\,\exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{2}\right) \ ,$$

donde $\hbar\omega = (E_{2\ell m} - E_{100})$. ¿Cambia la respuesta si se incorpora el espín a la descripción?

Problema 8: Un oscilador está en el estado fundamental de $\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1$, donde la perturbación independiente del tiempo $\hat{H}^1$ corresponde al potencial lineal $-fx$. Si en $t=0$, $\hat{H}^1$ se apaga abruptamente, se quiere demostrar que la probabilidad de que el sistema esté en el autoestado n-ésimo de $\hat{H}^0$ estará dada por la distribución de Poisson

$$P(n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \ , \qquad \text{donde} \quad \lambda = \frac{f^2}{2m\omega^3\hbar} \ .$$

Problema 9: Considere un hamiltoniano $\hat{H}_0$ cuyos autoestados n-ésimo y m-ésimo, $|\phi_n\rangle$ y $|\phi_m\rangle$, tienen energías $E_n^{(0)}$ y $E_m^{(0)}$ respectivamente. A este hamiltoniano se suma una perturbación periódica de la forma $\hat{V}(t) = V_0\left(\hat{F}e^{-i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{i\omega t}\right)$, cuya frecuencia es tal que $E_m^{(0)} - E_n^{(0)} = \hbar(\omega+\epsilon)$, donde $|\epsilon| \ll \omega$, y el operador $\hat{F}$ es independiente del tiempo.

a) Estime la probabilidad de transición de $|\phi_n\rangle$ a $|\phi_m\rangle$ al cabo de un tiempo t y a orden V_0^2.

b) Muestre que si se considera el estado inicial $|\phi_m\rangle$ y el final $|\phi_n\rangle$, la probabilidad de transición es la misma.

c) Analice cuándo es esperable que el resultado perturbativo sea correcto, y cuándo no puede serlo. En particular, considere los casos de tiempos cortos y largos, y los casos $\epsilon = 0$ y $|\epsilon| \gg |V_0/\hbar|$.

d) Muestre que si $\omega \gg |\epsilon|$, entonces uno de los dos términos dentro de la integral para la probabilidad de transición es despreciable frente al otro.

e) Considere un ejemplo típico en un problema de un láser actuando sobre una transición entre dos niveles atómicos: asuma que la diferencia de energía entre los dos niveles corresponde a una longitud de onda de 700 nm, que $\epsilon = 2\pi \times 100$ GHz, y $V_0/\hbar = 2\pi \times 10$ GHz.

- e_1) Verifique que vale $\omega \gg |V_0/\hbar|$, lo cual es necesario para poder aplicar teoría de perturbaciones.
- e_2) Compare el orden de magnitud de los dos términos de la integral mencionados en el ítem **d)**.
- e_3) Estime la máxima probabilidad de transición de un nivel al otro.