Mecánica Cuántica II

Guía 6: Dispersión de partículas

7 de noviembre de 2024

***Problema 1:** Un proyectil de masa μ_1 impacta sobre una partícula blanco de masa μ_2 . Si desde el centro de masa el ángulo de dispersión del proyectil es θ y desde el laboratorio es θ_1 , muestre que, para dispersión elástica se tiene

$$\cos\theta_1 = \frac{\cos\theta + \dfrac{\mu_1}{\mu_2}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 + 2\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\cos\theta}} \; .$$

Problema 2: La solución general para la función de onda $\psi(\boldsymbol{r})$ de un proyectil de masa μ que es dispersado por un potencial $V(\boldsymbol{r})$ obedece la ecuación

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\boldsymbol{r})\,\psi(\boldsymbol{r}) \; ,$$

y puede obtenerse separando la solución homogénea y la función de Green que satisface:

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}) \; .$$

Explicitando las soluciones homogéneas, muestre que este procedimiento conduce a la expresión

$$\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{r}) = \phi_{\rm inc}(\boldsymbol{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int \mathrm{d}^3r' \, \frac{e^{\pm ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} V(\boldsymbol{r'})\,\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{r'}) \; .$$

Interprete el significado de $\psi^{(+)}(\boldsymbol{r})$ y $\psi^{(-)}(\boldsymbol{r})$.

Problema 3: **a)** Calcule la sección eficaz diferencial y total de dispersión para el potencial de Coulomb apantallado, $V(r) = V_o\, e^{-\alpha r}/r$ en la aproximación de Born para dispersión elástica. Muestre que en el límite $\alpha \to 0$ se obtiene la sección eficaz diferencial exacta para el potencial de Coulomb

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{4\mu^2 V_o^2}{\hbar^4 q^4} \; ,$$

donde $q = |\boldsymbol{k}_o - \boldsymbol{k}| = 2k \;\mathrm{sen}\, \dfrac{\theta}{2}$ es el momento transferido.

b) Muestre que para el potencial de Coulomb, la sección eficaz total obtenida de la sección eficaz diferencial diverge.

Problema 4: Aplique la aproximación de Born a la dispersión debida a un pozo esférico de radio R y profundidad V_o.

a) Calcule la sección eficaz diferencial y grafique como función de qR, analizando los casos $kR \gg 1$ y $kR \ll 1$.

b) Escriba la expresión correspondiente a la sección total; resuelva para el caso $kR \ll 1$ y encuentre una expresión aproximada para el caso $kR \gg 1$.

Problema 5: Considere un potencial con simetría azimutal en la dirección z que, expresado en coordenadas cilíndricas, tiene la forma gaussiana:

$$V(\rho, z) = V_o\, e^{-(z/a)^2 - (\rho/b)^2} \; ,$$

donde V_o, a y b son constantes positivas.

a) Calcule la sección diferencial de dispersión elástica en primera aproximación de Born si el eje de colisión es el eje z.

b) Analice el límite de un haz incidente de energía muy alta. Interprete.

c) Analice también el caso de energías incidentes que tienden a cero. Interprete la validez del resultado.

* Opcional.

Problema 6: Una partícula es dispersada por un pozo de potencial atractivo de la forma

$$V(r) = \begin{cases} -V_o & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Si la energía de la partícula incidente es suficientemente baja ($kR \ll 1$), imponga las condiciones de continuidad a la solución expandida en ondas parciales y conserve solo los términos relevantes ($\ell = 0$). Muestre que el desfasaje en este caso debe satisfacer la condición

$$\delta_o = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{k}{q}\,\operatorname{tg}(qR)\right] - kR\,,$$

donde $q = \sqrt{2m(E+V_o)}/\hbar$ corresponde a la onda dentro del pozo ($r < R$).

a) Encuentre una expresión para la sección eficaz total y analice los casos de resonancia.

b) Estudie los casos $k \ll q$ ($V_o \gg E$) y $k \simeq q$ ($V_o \ll E$) y compare con los resultados del problema 4.