Mecánica

Apuntes de clase 2023 - Gustavo Castellano

A lo largo de esta materia retomaremos muchos de los problemas que vimos en *Física General I*, abarcando muchos casos similares mediante otros enfoques, los cuales además nos permitirán resolver situaciones sumamente complicadas si nos limitamos al formalismo de la mecánica newtoniana. Partimos entonces con un repaso de lo que ya hemos visto, para luego introducir nuevas herramientas.

1. Mecánica newtoniana en un sistema de partículas

Este formalismo se basa en la postulación de las llamadas leyes de Newton, que gobiernan la dinámica de una partícula "puntual" descripta mediante el vector posición $\mathbf{r}(t)$ y una velocidad $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$:

 1^{a} ley Existen sistemas de referencia llamados "inerciales" en los que toda partícula *aislada* (libre de fuerzas) describe un movimiento rectilíneo uniforme.

Claramente, a partir de un dado sistema inercial podemos definir otros infinitos sistemas inerciales que respecto de este se mueven con velocidades (vectores) constantes. En todo este formalismo aceptamos que el tiempo es una magnitud "absoluta", es decir, transcurre de idéntica manera en todos los referenciales considerados.

2^a ley En cualquier sistema inercial, una partícula de masa m sometida a una fuerza (total) F sufre una aceleración a = dv/dt dada por la ecuación

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$$
 .

Aquí la masa es una magnitud positiva, representativa de la cantidad de materia contenida en la partícula descripta.

 $3^{\mathbf{a}}$ ley ("principio de acción y reacción") Si denotamos como F_{ij} la fuerza que la partícula *j*-ésima ejerce una sobre la *i*-ésima, entonces siempre se cumple

$$F_{ji} = -F_{ij}$$
 .

Vale la pena aclarar que esto se cumple aun cuando estas fuerzas de interacción entre partículas no necesariamente son *colineales*.

Momento lineal

Evidentemente estas leyes se aplican también a sistemas de varias partículas de masas m_i , en cuyo caso conviene distinguir las fuerzas $F_i^{(e)}$, originadas en causas externas al sistema considerado, de las fuerzas de interacción F_{ij} entre las partículas que componen ese sistema. Esta conveniencia resulta evidente al analizar la evolución del momento lineal total P de un sistema de N partículas, definido a partir del momento lineal de cada partícula $p_i \equiv m_i v_i$

$$oldsymbol{P} = \sum_{i=1}^N oldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i oldsymbol{v}_i \; .$$

A partir de la 2^a ley de Newton,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^N \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{\substack{i,j=1\\j\neq i}}^N \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})} \,.$$

El primer término del miembro de la derecha se anula en virtud de la 3^{a} ley (ejercicio). Recordando la definición para la posición del centro de masa de un sistema de partículas

$$\boldsymbol{R} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{M} \quad \text{donde } M = \sum_{i=1}^{N} m_i \quad \text{es la masa total del sistema,}$$

la ecuación previa puede reescribirse como

$$M \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{R}}{\mathrm{d} t^2} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})} \equiv \boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d} \boldsymbol{P}}{\mathrm{d} t} = \boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})}$$

Concluimos entonces que cuando en un sistema resulta $F^{(e)} = 0$, se conserva el impulso lineal total P. Vale la pena destacar que estas son identidades vectoriales, es decir involucran a las 3 componentes de los vectores; en particular, puede ocurrir que solo se anule alguna componente de $F^{(e)}$, lo que implica que la correspondiente componente de P se conservará.

Momento angular

Además del movimiento de traslación, es útil incorporar el momento angular de una partícula $J_i = r_i \times p_i = m_i r_i \times v_i$, el cual depende del origen de coordenadas que escogemos, por lo que siempre conviene especificar el referencial *inercial* empleado: si el origen de coordenadas Q de ese referencial se señala mediante el vector r_Q , y se desplaza con velocidad constante v_Q , el momento angular total respecto de Q es

$$oldsymbol{J}_{\!\scriptscriptstyle Q} = \sum_{i=1}^N m_i(oldsymbol{r}_i \!-\! oldsymbol{r}_{\!\scriptscriptstyle Q}) \! imes \! \left(oldsymbol{v}_i \!-\! oldsymbol{v}_{\!\scriptscriptstyle Q}
ight),$$

y su evolución puede calcularse como

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}_{Q}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{r}_{i} - \boldsymbol{r}_{Q}) \times (\dot{\boldsymbol{p}}_{i} - m_{i} \dot{\boldsymbol{v}}_{Q}) + \sum_{i=1}^{N} m_{i} (\boldsymbol{v}_{i} - \boldsymbol{v}_{Q}) \times (\boldsymbol{v}_{i} - \boldsymbol{v}_{Q}) \ .$$

El producto vectorial en el último término se anula, y recordando que $\dot{p}_i = \sum_j F_{ij} + F_i^{(e)}$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}_{Q}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\substack{i,j=1\\j\neq i}}^{N} (\boldsymbol{r}_{i} - \boldsymbol{r}_{Q}) \times \boldsymbol{F}_{ij} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_{i}(\boldsymbol{r}_{i} - \boldsymbol{r}_{Q}) \times \boldsymbol{F}_{i}^{(\mathrm{e})}}_{\boldsymbol{\tau}_{Q}^{(\mathrm{e})}} .$$

Denotaremos entonces a la resultante de los torques externos con $\tau_Q^{(e)}$. Teniendo presente que i, j son índices mudos y que $F_{ji} = -F_{ij}$, reescribimos el primer término (ejercicio)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}_{Q}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i \neq j}^{N} (\boldsymbol{r}_{i} - \boldsymbol{r}_{Q}) \times \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_{j \neq i}^{N} (\boldsymbol{r}_{j} - \boldsymbol{r}_{Q}) \times \boldsymbol{F}_{ji} \right] + \boldsymbol{\tau}_{Q}^{(\mathbf{e})} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^{N} (\boldsymbol{r}_{i} - \boldsymbol{r}_{j}) \times \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{\tau}_{Q}^{(\mathbf{e})}$$

Vemos que en los casos en que $F_{ij} \parallel (r_i - r_j)$ el primer término de la derecha se anula, de manera que

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}_{Q}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}_{Q}^{(\mathbf{e})} \; .$$

Esta identidad vectorial nos indica que cuando el torque externo (o alguna de sus componentes) sobre un sistema se anula, entonces se conserva el momento angular total J_Q (o la correspondiente componente).

Muchas veces resulta conveniente expresar los r_i en términos de la posición R del centro de masa del sistema y las posiciones relativas al centro de masa r'_i

$$oldsymbol{r}_i = oldsymbol{R} + oldsymbol{r}_i^{\prime} \,, \qquad \qquad oldsymbol{v}_i = oldsymbol{V} + oldsymbol{v}_i^{\prime} \qquad \qquad (oldsymbol{V} \equiv \dot{oldsymbol{R}})$$

(aquí estamos eligiendo $r_{Q} = 0$). Entonces resulta

$$\boldsymbol{J}_{Q=0} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_i) \times (\boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}'_i) = \boldsymbol{R} \times M \boldsymbol{V} + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r'_i\right) \times \boldsymbol{V} + \boldsymbol{R} \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i v'_i\right) + \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{v}'_i$$

donde notamos que el paréntesis del segundo término de la derecha representa la posición del centro de masa desde el centro de masa, que evidentemente se anula; lo mismo ocurre con el otro paréntesis, que indica la velocidad del centro de masa, también descripta desde el centro de masa. De este modo resulta

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{R} imes \boldsymbol{P} + \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}'_i imes \boldsymbol{v}'_i \; ,$$

donde el primer término da cuenta del momento angular orbital, que solo considera el movimiento de traslación, como si representáramos a todo el sistema como una partícula puntual, aglutinando toda su masa en la posición \mathbf{R} ; mientras que el segundo término señala el momento angular de espín, es decir, visto desde el centro de masa. Claramente, el primer término depende de la elección del referencial empleado para describir la dinámica del sistema, mientras que el momento angular de espín \mathbf{J}_s es independiente del referencial escogido. En particular, más adelante repasaremos el caso de un cuerpo rígido, en el que todos los \mathbf{r}'_i solo cambian de orientación (no en módulo) con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, a través de la relación $\mathbf{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$: en cuerpos simétricos en los que la rotación ocurre alrededor de un eje de simetría, puede relacionarse el momento angular de espín con $\boldsymbol{\omega}$ mediante el momento de inercia I_o alrededor de un eje de rotación que pase por el centro de masa, a través de la igualdad $\mathbf{J}_s = I_o \boldsymbol{\omega}$.

Energía

La energía cinética de un sistema de partículas se define como

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}_i')^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) \boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i {\boldsymbol{v}_i'}^2 + \boldsymbol{V} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i {\boldsymbol{v}_i'}^$$

donde el último miembro de la derecha se anula, como expresamos más arriba. Vemos que en esta expresión también podemos identificar la energía cinética correspondiente al movimiento de traslación del sistema como un todo (primer término), más la energía cinética del sistema vista desde su centro de masa (segundo término)

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i {v'_i}^2.$$

Para un cuerpo rígido ($v'_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i$) simétrico, también aquí puede expresarse la energía cinética de rotación alrededor de un eje de simetría (segundo término) mediante I_o y $\boldsymbol{\omega}$, como $T_{\rm rot} = I_o \omega^2/2$.

Esta cantidad pude modificarse realizando trabajo mecánico sobre las partículas, como veremos a continuación. Para llevar al sistema desde el estado A al B, el trabajo realizado por todas las fuerzas aplicadas es

$$W_{AB} = \sum_{i=1}^{N} \int_{A}^{B} \left(\boldsymbol{F}_{i}^{(e)} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \boldsymbol{F}_{ij} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{i} \; .$$

Por la segunda ley de Newton, podemos sustituir el paréntesis por $m_i \dot{v}_i$, y a partir de la definición para la velocidad reemplazamos d $r_i = v_i dt$

$$W_{AB} = \sum_{i=1}^{N} \int_{A}^{B} m_{i} \underbrace{\dot{v}_{i} \cdot v_{i}}_{\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v_{i}^{2})} dt = \int_{A}^{B} \sum_{i=1}^{N} d\left(\frac{1}{2}m_{i}v_{i}^{2}\right) = T_{B} - T_{A} .$$

Mostramos entonces que la variación de la energía cinética al llevar el sistema del estado A al B es igual al trabajo realizado sobre el mismo en ese proceso.

Decimos que las fuerzas externas son conservativas cuando pueden derivarse a partir de un potencial escalar $V^{(e)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N)$, es decir

$$\boldsymbol{F}_{i}^{(\mathrm{e})} = -\nabla_{i} V^{(\mathrm{e})} = -\left(\boldsymbol{\hat{\imath}} \frac{\partial}{\partial x_{i}} + \boldsymbol{\hat{\jmath}} \frac{\partial}{\partial y_{i}} + \boldsymbol{\hat{k}} \frac{\partial}{\partial z_{i}}\right) V^{(\mathrm{e})} \equiv -\frac{\partial V^{(\mathrm{e})}}{\partial \boldsymbol{r}_{i}}.$$

Para el trabajo realizado por las fuerzas externas tenemos entonces

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{A}^{B} \boldsymbol{F}_{i}^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{i} = -\int_{A}^{B} \sum_{i=1}^{N} \nabla_{i} V^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{i} = -\int_{A}^{B} \mathrm{d}V^{(e)} = V_{A}^{(e)} - V_{B}^{(e)} .$$

Si además las fuerzas de interacción F_{ij} solo dependen de $r_{ij} \equiv r_i - r_j$ y pueden derivarse de un potencial $V_{ij}(r_{ij})$, con $V_{ij} = V_{ji}$ de manera que $F_{ij} = -\nabla_i V_{ij}$ cumple con la tercera ley de Newton (ejercicio), entonces podemos escribir para el término restante como

$$\sum_{i\neq j} \int_{A}^{B} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{i} = \frac{1}{2} \sum_{i\neq j} \int_{A}^{B} \left(\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{i} + \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{j} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i\neq j} \int_{A}^{B} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathrm{d}(\mathbf{r}_{i} - \mathbf{r}_{j}) = \frac{1}{2} \sum_{i\neq j} \int_{A}^{B} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{ij} .$$

Notando que

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_i} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_{ij}} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i \neq j} \int_A^B \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int_A^B \mathrm{d}V_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} \Big|_A^B.$$

Resumiendo, en estos casos

$$W_{AB} = T_B - T_A = \left(V_A^{(e)} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} \Big|_A \right) - \left(V_B^{(e)} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} \Big|_B \right) = V_A - V_B ,$$

o bien

$$T_A + V_A = T_B + V_B \qquad \Rightarrow \qquad E_A = E_B ,$$

que no es otra cosa que nuestra bienamada conservación de la energía.

2. Principio de d'Alembert - Ecuaciones de Lagrange - Lagrangiana

2.1. Vínculos

Llamamos así a las restricciones para las posibles posiciones o velocidades de las partículas que componen un sistema mecánico. Es importante resaltar que estos son condicionamientos que se imponen *a priori*, es decir, se trata de limitaciones establecidas antes de resolver la evolución del sistema. Por ejemplo, una partícula que se desplaza en una determinada superficie se describe mediante el vector $\mathbf{r} = (x, y, z)$; sin embargo, la ecuación que define esa superficie tiene la forma $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z) = 0$, y por lo tanto las coordenadas x, y, zdejan de ser independientes. Claramente, cada condición como esta reduce el número de grados de libertad del sistema considerado. A menudo encontraremos ejemplos concretos de estas situaciones al describir el movimiento de una partícula en un plano horizontal, para el cual f(x, y, z) = z - a = 0; una superficie esférica, donde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, etc.; y también para casos en que esas superficies cambian con el tiempo, donde puede escogerse una relación f(x, y, z, t)=0, como en el caso sencillo en que el plano horizontal donde la partícula desarrolla su movimiento va ocupando una altura z=a(t), de manera que f(x, y, z, t)=z - a(t)=0.

El mismo planteo puede hacerse para un sistema de partículas, como es el caso de 2 masas puntuales conectadas por una varilla de largo ℓ constante, de modo que debe respetarse la condición $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 = \ell^2$, que escribimos como $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - \ell^2 = 0$. Otro ejemplo habitual que plantearemos es el del péndulo doble, que consta de dos masas m_1 y m_2 conectadas a un punto de suspensión como se muestra en la figura, por un hilo inextensible de largo ℓ_1 , y conectadas entre sí mediante otro hilo inextensible de largo ℓ_2 ; en este caso las ecuaciones de vínculo se escriben como



$$x_1^2 + y_1^2 - \ell_1^2 = 0$$
, $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - \ell_2^2 = 0$

Todos estos ejemplos conforman vínculos holónomos: cada uno de ellos se expresa mediante una relación

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M, t) = 0$$

entre algunas coordenadas $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_M$ arbitrarias (no necesariamente cartesianas), y eventualmente el tiempo. Los vínculos que no pueden expresarse de esta manera han sido ingeniosamente bautizados como **no holónomos**; un ejemplo de estos es el de las N moléculas de un gas contenidas en un recipiente de aristas a, b y c, en el que debe cumplirse

 $0 < x_i < a$, $0 < y_i < b$, $0 < z_i < c$ (i = 1, ..., N).

En muchos casos, los vínculos no holónomos suelen representarse mediante relaciones no integrables que involucran también a las velocidades $\dot{\xi}$

$$g(\xi_1, \dots, \xi_M, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_M, t) = 0$$
.

Por ejemplo, si denotamos con x la coordenada del centro de un cilindro de radio R que rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal, y con φ el correspondiente ángulo de giro, está claro que se cumple la relación $\dot{x} = R \dot{\varphi}$; sin embargo esta relación es *integrable*, ya que se trata de la derivada de $x = R \varphi$, y por lo tanto representa un vínculo holónomo.





Consideremos ahora un monociclo que representamos mediante un disco que gira sin deslizar sobre otra^{*} superficie horizontal, manteniéndose siempre vertical y cambiando su dirección de viaje según el ángulo θ de la figura. Podemos descomponer la velocidad \boldsymbol{v} del centro del disco como

$$\dot{x} = v_x = v \cos \theta$$
, $\dot{y} = v_y = v \sin \theta$,

y como aquí también se cumple $v = R \dot{\theta}$, las ecuaciones de vínculo resultantes son

$$\dot{x} - R\dot{\phi}\cos\theta = 0$$
 y $\dot{y} - R\dot{\phi}\sin\theta = 0$.

Como $\theta(t)$ es una función desconocida, está claro que estas ecuaciones no son integrables, por lo que este caso ilustra un vínculo no holónomo.

2.2. Desplazamientos virtuales

Entonces está claro que en cada instante un sistema puede acceder a infinidad de configuraciones, siempre que estas sean consistentes con las restricciones impuestas por los vínculos. Con esa idea en mente definimos como "desplazamientos virtuales" a aquellos desplazamientos infinitesimales que permitirían que el sistema pase de una configuración posible a otra muy próxima. Para un sistema de N partículas tendremos un conjunto de desplazamientos virtuales $\{\delta r_i\}$ (i = 1, ..., N) que las partículas pueden realizar instantáneamente (t se mantiene fijo) respetando los vínculos impuestos. Vale la pena enfatizar nuevamente que estos desplazamientos se denominan virtuales porque no ocurren en la evolución real del sistema, sino que en cada instante imaginamos hacia dónde podría desplazarse el estado conjunto de partículas de acuerdo con las restricciones contenidas en los vínculos.

Al imaginar esos $\{\delta r_i\}$ podemos computar el trabajo virtual que realizarían las fuerzas que actúan sobre las partículas, en particular las fuerzas de vínculo, que son aquellas encargadas de limitar el movimiento para respetar las condiciones $f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_M, t) = 0$, o $g(\xi_1, ..., \xi_M, \dot{\xi}_1, ..., \dot{\xi}_M, t) = 0$, o cualquier otra restricción que corresponda. En la mayoría de los casos de interés, se anula el trabajo virtual total realizado por las fuerzas de vínculo. Si repasamos los ejemplos presentados más arriba, vemos que esta condición se cumple en todos ellos, y muchos más que podamos imaginar. Aquellos vínculos en los cuales las fuerzas asociadas no realizan trabajo virtual[†] son llamados vínculos ideales. Nuestros próximos desarrollos presuponen que los vínculos impuestos siempre son ideales.

Como dijimos anteriormente, en el marco de la mecánica newtoniana buscamos resolver la evolución de un sistema mediante ecuaciones diferenciales como $m \ddot{r}_i = F_i = F_i^{(a)} + f_i$ (i = 1, ..., N), donde discriminamos la resultante de las fuerzas "aplicadas" $F_i^{(a)}$, de las fuerzas de vínculo f_i , encargadas de restringir los posibles movimientos. Estas ecuaciones de segundo orden tienen una única solución $\{r_i\}$, cuando son conocidas las condiciones iniciales. En este formalismo, si aparecen vínculos surgen inconvenientes en diferentes niveles. Por ejemplo, aun cuando sepamos que no son necesarias muchas coordenadas, no podemos evitarlas si queremos incluir todas las fuerzas intervinientes en las ecuaciones que debemos resolver; esto se pone especialmente en evidencia cuando los vínculos involucrados son holónomos. Por otro lado, la mayoría de las veces las fuerzas de vínculo se desconocen de antemano, y deben incluirse como incógnitas adicionales en el conjunto de ecuaciones para resolver. En este sentido, la formulación newtoniana es *poco económica*, y a menudo estas complicaciones impiden la resolución de muchos problemas mediante este formalismo.

Por este motivo se procura encontrar formulaciones alternativas, que puedan prescindir de las fuerzas de vínculo, involucrando solamente un conjunto de coordenadas independientes. Antes de describir métodos para analizar la dinámica de un sistema, veamos el caso estático, es decir, un sistema de partículas *en equilibrio*, donde se cumple $\mathbf{F}_i = 0 \quad \forall i$. Evidentemente, ante desplazamientos virtuales $\{\delta \mathbf{r}_i\}$, los trabajos $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$ realizados

^{*}Para evitar accidentes.

[†]Atentil, que cuando el sistema evoluciona cualquier fuerza puede realizar trabajo real.

sobre cada partícula se anulan, con lo cual es obvio que también

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_{i} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{i}^{(a)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_{i} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_{i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_{i} = 0.$$

Como solo consideramos el caso de vínculos ideales, sabemos que la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas de vínculo se anula. Arribamos así al **principio de los trabajos virtuales**, que establece que para sistemas en equilibrio, ante desplazamientos virtuales $\{\delta r_i\}$ se cumple

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{i}^{(a)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_{i} = 0 \; .$$

Vemos que logramos prescindir de las fuerzas de vínculo para encontrar la condición de equilibrio de un sistema; por supuesto que a cambio exigimos que se satisfagan las restricciones impuestas por las fuerzas de vínculo, pero la ventaja de esta formulación es que no necesitamos agregar esas incógnitas para establecer los $\{r_i\}$ para el equilibrio.

Analicemos la posición de equilibrio para el caso del péndulo doble descripto anteriormente. Las respectivas fuerzas $F_1^{(a)}$ y $F_2^{(a)}$ que actúan sobre m_1 y m_2 son $m_1 g \hat{j}$ y $m_2 g \hat{j}$, de manera que escribiendo $\delta r_1 = \delta x_1 \hat{\imath} + \delta y_1 \hat{j}$ y $\delta r_2 = \delta x_2 \hat{\imath} + \delta y_2 \hat{j}$ resulta (ejercicio)

$$F_1^{(a)} \cdot \delta r_1 + F_2^{(a)} \cdot \delta r_2 = m_1 g \, \delta y_1 + m_2 g \, \delta y_2 = 0$$
.

Esta identidad debe anularse en torno de las posiciones de equilibrio, para cualquier elección de desplazamientos virtuales $(\delta y_1, \delta y_2)$, y como m_1 , m_2 y g son distintos de cero, debe cumplirse (ejercicio)

$$\delta y_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell_1 \sin \theta_1 \, \delta \theta_1 = 0 \qquad \qquad y \qquad \quad \delta y_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell_1 \sin \theta_1 \, \delta \theta_1 + \ell_2 \sin \theta_2 \, \delta \theta_2 = 0 \; .$$

para cualquier elección de apartamientos $\delta\theta_1$ y $\delta\theta_2$: la única alternativa posible es que el equilibrio se dé para $y_1 = \ell_1$ junto con $y_2 = \ell_1 + \ell_2$ ($\theta_1 = \theta_2 = 0$).

2.3. Principio de d'Alembert

Las ideas presentadas en la sección anterior pueden trasladarse a sistemas dinámicos. Una forma de escribir la 2^a ley de Newton es

$$\boldsymbol{F}_i - \dot{\boldsymbol{p}}_i = 0 \qquad (\boldsymbol{p}_i = m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i)$$

Esta ecuación fue interpretada por d'Alembert como la fuerza total resultante, ya que el término $-\dot{p}_i$ involucra la fuerza ficticia que surge al describir la dinámica desde un sistema *no inercial*, como es el que acompaña a la partícula en su movimiento: desde allí la masa m_i está obviamente en reposo. Con esta idea en mente, el principio de los trabajos virtuales se extiende naturalmente a un sistema dinámico mediante esta descripción; teniendo presente que podemos omitir las fuerzas de vínculo (*ideales*) al computar los trabajos virtuales,

$$\sum_{i=1}^{N} (\dot{\boldsymbol{p}}_{i} - \boldsymbol{F}_{i}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_{i} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{\boldsymbol{p}}_{i} - \boldsymbol{F}_{i}^{(a)} \right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_{i} = 0 . \qquad Principio \ de \ d'Alembert$$

Entonces sabemos que podemos plantear estas condiciones para encontrar los p_i y por lo tanto las soluciones $r_i(t)$ de nuestro sistema, prescindiendo de las fuer-

zas de vínculo, que son desconocidas de antemano. Para ello, hemos impuesto las restricciones que deben cumplir los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{r}_i$, que en realidad son condicionamientos establecidos por las fuerzas de vínculo. Vale la pena enfatizar nuevamente que los $\{\delta \mathbf{r}_i\}$ no son todos independientes, como mencionamos más arriba.

Ilustremos estas ideas con el análisis de una máquina de Atwood, detallada en la figura: aquí el hilo inextensible de longitud ℓ no tiene masa, al igual que la polea de radio R, la cual gira sin rozamiento. En es-



te caso $r_1 = x_1 \hat{i}$ y $r_2 = x_2 \hat{i}$. Podemos representar el vínculo holónomo impuesto por el hilo inextensible como

$$x_1 + x_2 = \ell - \pi R = \text{constante}$$
.

Esta relación condiciona los posibles desplazamientos virtuales, que cumplen

$$\delta x_1 + \delta x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta x_2 = -\delta x_1 \,.$$

Por supuesto, las igualdades anteriores también implican $\dot{x}_2 = -\dot{x}_1$ y por ende $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$. Sabemos además que

$$F_1^{(a)} = m_1 g \, m{\hat{\imath}} \qquad {
m y} \qquad F_2^{(a)} = m_2 g \, m{\hat{\imath}} \, ,$$

y como las fuerzas de vínculo no deben considerarse, vamos desapareciendo el supraíndice $^{(a)}$. Imponiendo el principio de d'Alembert y utilizando las ecuaciones para los vínculos obtenemos

$$m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 \qquad \dots \Rightarrow \qquad (m_1 + m_2) \, \ddot{\boldsymbol{x}}_1 = (m_1 - m_2) \, g \quad \Rightarrow \quad \ddot{\boldsymbol{x}}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad \Rightarrow \quad \ddot{\boldsymbol{x}}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{\imath} + m_2 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{\imath} = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{\imath} = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath} \cdot \delta \boldsymbol{\imath} = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \delta \boldsymbol{\imath} = m_1 g \, \hat{\boldsymbol{\imath} \cdot \delta \boldsymbol{\imath} = m_1 g \, \hat{$$

2.4. Coordenadas generalizadas - Ecuaciones de Lagrange

Surge naturalmente la idea de representar nuestro sistema solamente con las coordenadas necesarias para su descripción, sin que se susciten redundancias: este conjunto de variables independientes son las llamadas coordenadas generalizadas, que denotaremos de manera genérica como $(q_1, q_2, ..., q_n)$. Las mismas cumplen dos requisitos importantes: por un lado, el vector posición de cada partícula queda siempre determinado por las q_s ; a su vez, las relaciones de vínculo (holonómicos) $f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_M, t) = 0$ se satisfacen automáticamente la utilizar las q_s .

Il ustremos este concepto volviendo al péndulo doble descripto en §2.1, donde notamos que el sistema tiene 2 grados de libertad, por lo cual elegimos las coordenadas generalizadas $q_1 = \theta_1$ y $q_2 = \theta_2$. Notamos que todas las posiciones pueden escribirse en términos de q_1 y q_2 (ejercicio), y también que las ecuaciones de vínculo

$$x_1^2 + y_1^2 - \ell_1^2 = \ell_1^2 \sin^2 \theta_1 + \ell_1^2 \cos^2 \theta_1 - \ell_1^2 = 0 ,$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \ell_2^2 = \ell_2^2 \sin^2 \theta_2 + \ell_2^2 \cos^2 \theta_2 - \ell_2^2 = 0$$

se cumplen automáticamente, es decir, la correcta elección de las coordenadas generalizadas nos permite prescindir de las ecuaciones de vínculo.

Si tenemos p vínculos holónomos en un sistema (3D) de N partículas

$$f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$$
, $f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$, \dots , $f_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$,

de las 3N coordenadas $\{x_i, y_i, z_i\}$, solo 3N - p = n son independientes, por lo que el sistema descripto cuenta con n grados de libertad, de modo que es posible describirlo mediante n coordenadas generalizadas.

Entonces en el caso general podemos expresar $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ $(i = 1, \dots, N)$ y sabemos que los vínculos $f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$, se satisfacen automáticamente. El conjunto $q \equiv \{q_k\}$ determina un "espacio de configuraciones" donde podemos representar todos los estados posibles para el sistema descripto. Ahora intentaremos expresar el principio de d'Alembert en términos de q; para ello primero escribimos los desplazamientos virtuales

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{k=1}^n rac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \, \delta q_k$$
 .

(recordemos que están definidos para t
 fijo). Escribimos ahora los trabajos virtuales de las fuerzas aplicadas
 $\pmb{F}_i^{(a)}$ como

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{i}^{(a)} \,\delta\boldsymbol{r}_{i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{i}^{(a)} \,\frac{\partial \boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{k}} \delta q_{k} = \sum_{k=1}^{n} Q_{k} \,\delta q_{k} \,, \tag{1}$$

donde introducimos la fuerza generalizada Q, cuya componente k-ésima está definida como

$$Q_k \equiv \sum_{i=1}^N \boldsymbol{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}$$

Vale la pena notar que como las q_k no necesariamente miden longitudes, las componentes Q_k pueden no tener unidades de fuerza, aunque los productos $Q_k \,\delta q_k$ siempre deben tener unidades de trabajo (energía). Finalmente, completamos el desarrollo en términos de las coordenadas generalizadas con la suma

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\boldsymbol{p}}_{i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_{i} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} m_{i} \dot{\boldsymbol{v}}_{i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{k}} \delta q_{k} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m_{i} \boldsymbol{v}_{i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{k}} \right) - m_{i} \boldsymbol{v}_{i} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{k}} \right) \right] \delta q_{k} . \tag{2}$$

Analizamos la derivada del último sumando, teniendo presente que como $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, entonces $\partial \mathbf{r}_i / \partial q_k$ depende también de $q \ge t$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right) = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial}{\partial q_\ell} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right) \dot{q}_\ell + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)}_{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_k} , \qquad (3)$$

donde, como es usual, denotamos $\dot{q}_k \equiv dq_k/dt$. Aquí es importante destacar que, aunque las r_i son solo funciones de las q y de t, el proceso de derivación respecto de t hace que en v_i intervengan además las \dot{q} , es decir $v_i = v_i(q, \dot{q}, t)$

$$\boldsymbol{v}_i = rac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^n rac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + rac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

En particular, v_i depende linealmente de las \dot{q} , de modo que la identidad anterior pone en evidencia que

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \;,$$

que interviene en la primera suma de (2). Sustituyendo estos resultados para los coeficientes de los desplazamientos virtuales δq_k en (2)

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{v}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_k} \right] = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2 \right) \right] \,.$$

Recordando nuestra definición para la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^2 \,,$$

vemos que

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{v}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \,.$$

Estamos en condiciones entonces de expresar el principio de d'Alembert en términos de las coordenadas generalizadas, reuniendo (1) y (2)

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\boldsymbol{p}}_{i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_{i} - \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_{i} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{k}} - Q_{k} \right] \delta q_{k} = 0 \; .$$

Como esta identidad debe valer para un conjunto arbitrario de desplazamientos virtuales $\{\delta q_k\}$, los que además son independientes, entonces debe anularse cada término, con lo cual arribamos a las **ecuaciones de Lagrange**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \;. \tag{4}$$

Contamos entonces con un método para resolver la dinámica de un sistema de partículas que prescinde de las fuerzas de vínculo, al tiempo que emplea tantas variables independientes como grados de libertad tiene el sistema (las *n* coordenadas generalizadas). Cuando no hay vínculos y elegimos coordenadas cartesianas para desarrollar nuestra descripción de la dinámica de una partícula, $q_1 = x$, $q_2 = y$ y $q_3 = z$, y las componentes de las fuerzas generalizadas resultan (ejercicio) $Q_1 = F_x$, $Q_2 = F_y$ y $Q_3 = F_z$, de manera que recuperamos las ecuaciones de movimiento newtonianas (ejercicio).

Presentemos también el ejemplo del movimiento de una partícula de masa m en un plano, bajo la acción de una fuerza F (también contenida en el plano), descripto mediante las coordenadas polares $q_1 = r$ y $q_2 = \theta$. En este caso las componentes de la fuerza generalizada resultan (ejercicio)

$$Q_1 = F_r \left(= \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r
ight)$$
 y $Q_2 = r F_{\theta} \left(= r \, \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta}
ight)$

Aquí se evidencia que la componente Q_2 se corresponde con el torque asociado a F desde el origen de coordenadas. Escribiendo la energía cinética en términos de las coordenadas y velocidades generalizadas

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) \,,$$

las ecuaciones de Lagrange resultan (ejercicio)

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r$$
, $mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = F_{\theta}$

que afortunadamente coinciden con las ecuaciones de movimiento que obtenemos mediante las formulación newtoniana (ejercicio).

2.5. Función de Lagrange o lagrangiana

Cuando las fuerzas F_i se derivan de un potencial $V(r_1, ..., r_N, t)$, las ecuaciones de Lagrange adquieren una forma bastante compacta, ya que

$$oldsymbol{F}_i = -
abla_i V = -\left(rac{\partial V}{\partial x_i}\,oldsymbol{\hat{\imath}} + rac{\partial V}{\partial y_i}\,oldsymbol{\hat{\jmath}} + rac{\partial V}{\partial z_i}\,oldsymbol{\hat{k}}
ight) = -rac{\partial V}{\partial oldsymbol{r}_i}\,.$$

Las componentes k de las fuerzas generalizadas entonces

$$Q_k \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

también se derivan del potencial. Entonces las ecuaciones de Lagrange pueden reescribirse como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0 \; .$$

Como V solo depende de las q_k , es decir $\partial V/\partial q_k = 0$, esta identidad equivale a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T-V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} (T-V) = 0 \; ,$$

de manera que definiendo la lagrangiana o función de Lagrange como L = T - V, las ecuaciones de movimiento se expresan como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad (k = 1, \dots, n) \qquad \text{ecuaciones de Lagrange} \tag{5}$$

Este es un conjunto de *n* ecuaciones diferenciales de segundo orden para las $q_k(t)$: para determinar íntegramente las soluciones deben acompañarse de 2n condiciones iniciales $q_1(t_o), \ldots, q_n(t_o), \dot{q}_1(t_o), \ldots, \dot{q}_n(t_o)$.

Vemos que este método para la descripción de la dinámica de un sistema consigue el objetivo de prescindir de las fuerzas de vínculo, y al mismo tiempo se involucran tantas variables independientes como grados de libertad posee el sistema. En este sentido, resulta más económico que el formalismo de Newton. Otro rasgo característico que observamos es que para arribar a las ecuaciones de Lagrange es necesario contar con expresiones para Ty V, que son funciones escalares de $\{q_k, \dot{q}_k\}$, en lugar de magnitudes vectoriales como las que intervienen en las ecuaciones de Newton —por supuesto tanto T como V deben estar descriptas en relación a un referencial inercial, ya que nuestra construcción se valió de esa hipótesis desde un comienzo (§2.3), donde planteamos que se cumple $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i$.

Vale la pena resaltar que las ecuaciones de Lagrange tienen siempre la misma forma, independientemente de la elección que realicemos para las coordenadas generalizadas $\{q_k\}$. A esta altura estamos en condiciones de comprobar esa invariancia al cambiar nuestra representación de $\{q_k\}$ a otro conjunto de coordenadas generalizadas $\{\tilde{q}_j\}$, relacionadas mediante una transformación puntual, es decir

$$\tilde{q}_j = \tilde{q}_j(q_1, \dots, q_n, t)$$
 $j = 1, \dots n$ o bien $q_k = q_k(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n, t)$ $k = 1, \dots n$

Derivando adecuadamente obtenemos

$$\dot{q}_k = \sum_{j=1} \frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_j} \, \dot{\tilde{q}}_j + \frac{\partial q_k}{\partial t} \, ,$$

donde nuevamente notamos que si bien las q solo dependen de \tilde{q} y t, el proceso de derivación nos lleva a que las \dot{q} dependan además de las $\dot{\tilde{q}}$; en particular vemos que dependen *linealmente* de las $\dot{\tilde{q}}$, por lo que está claro que

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} = \frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_j}$$

Como la nueva lagrangiana \tilde{L} no es otra cosa que la original, sustituyendo las variables q, \dot{q}, t por $\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t$

$$L(\tilde{q}, \tilde{q}, t) = L\left(q(\tilde{q}, t), \dot{q}(\tilde{q}, \tilde{q}, t), t\right) ,$$

para completar la demostración debemos desarrollar las derivadas

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} \right) \;,$$

de donde (ejercicio)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_j} \right) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \tilde{q}_j} \right] \,.$$

Del mismo modo escribimos

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_j} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_j} \right) \;,$$

y arribamos a que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_j} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_j} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right] \frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_j} = 0$$

Los corchetes se anulan en virtud de que se cumplen las ecuaciones de Lagrange representadas mediante las $\{q_k\}$, de manera que esto implica que también se cumplen las ecuaciones de Lagrange cuando pasamos a las $\{\tilde{q}_k\}$.

Otra propiedad importante de las lagrangianas es que, una vez elegidas las coordenadas generalizadas $\{q_k\}$, no hay una única elección para $L(q, \dot{q}, t)$: la adición de la derivada total con respecto a t de una función de las coordenadas generalizadas y el tiempo G(q, t)

$$L_2(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(q, t)$$
(6)

genera las mismas ecuaciones de movimiento. Se deja como ejercicio demostrarlo, recurriendo a cálculos similares a los precedentes.

Ilustremos la construcción de la función de Lagrange y la obtención de las ecuaciones de movimiento mediante el ejemplo de la figura, donde el hilo de longitud ℓ_o que une a las masas m_1 y m_2 sigue siendo inextensible y sin masa, de manera que las coordenadas x_1 y x_2 no son independientes sino que respetan la restricción $x_1+x_2 = \ell_o - \pi R$. Por otro lado, el resorte de constante k que conecta las masas m_2 y m_3 tiene una longitud natural ℓ . Tenemos entonces dos grados de libertad caracterizados mediante las coordenadas generalizadas x_2 y x_3 , y describimos la posición de m_1 expresando

$$x_1 = \ell_o - \pi R - x_2 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_1 = -\dot{x}_2 ,$$

En términos de las coordenadas elegidas, la energía cinética resulta

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2$$

y la energía potencial,

$$V = -m_1g x_1 - m_2g x_2 - m_3g x_3 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - \ell)^2 = -(m_2 - m_2)g x_2 - m_1g (\ell_o - \pi R) - m_3g x_3 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - \ell)^2.$$

Reuniendo estos elementos arribamos a la lagrangiana $L(x_2, x_3, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 + (m_2 - m_2)gx_2 + m_3gx_3 - \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - \ell)^2 + m_1g(\ell_o - \pi R)$$



que nos permitirá encontrar las ecuaciones de movimiento. Para ello derivamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= (m_1 + m_2) \, \dot{x}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = (m_1 + m_2) \ddot{x}_2 \; ; \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = (m_2 - m_1)g + k(x_3 - x_2 - \ell) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} &= m_3 \dot{x}_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) = m_3 \ddot{x}_3 \; ; \qquad \qquad \frac{\partial L}{\partial x_3} = m_3 g - k(x_3 - x_2 - \ell) \; . \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento resultan

$$(m_1+m_2)\dot{x}_2 - (m_2-m_1)g - k(x_3-x_2-\ell) = 0, \qquad m_3\dot{x}_3 - m_3g + k(x_3-x_2-\ell) = 0$$

Afortunadamente, el límite $k \to 0$ nos permite recuperar el resultado obtenido previamente para la máquina de Atwood.

Analicemos otro ejemplo, ilustrado en la figura, en el que una masa m se mueve a lo largo un alambre que gira con velocidad angular ω (constante). Aquí no hay fuerzas aplicadas —excepto la de vínculo que mantiene a la masa bajo esa restricción—, por lo cual V = 0, y la simetría del problema invita a realizar la descripción en coordenadas polares (r, θ) . Debemos obtener la energía cinética en términos de las coordenadas y velocidades generalizadas, para lo cual notamos que el ángulo polar θ está restringido por la condición $\dot{\theta} = \omega$, de modo que eligiendo $\theta(t = 0) = 0$ podemos representar este vínculo holónomo como $\theta = \omega t$. Describimos la dinámica en términos de la coordenada generalizada q = r, que representa el único grado de libertad que queda libre en este sistema



$$oldsymbol{r} = r\,oldsymbol{\hat{e}}_r \quad o \quad oldsymbol{v} = \dot{r}\,oldsymbol{\hat{e}}_r + r\,\dot{ heta}\,oldsymbol{\hat{e}}_ heta \qquad \Rightarrow \qquad L = T - V = rac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2
ight) \, ,$$

La ecuación de Lagrange para la función de movimiento r(t) resulta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{r} = \omega^2 r \; ,$$

coincidente con lo que obteníamos mediante el formalismo de Newton.

3. Principio de Hamilton - Ecuaciones de Euler-Lagrange

3.1. Cálculo de variaciones

Hasta aquí vimos cómo deducir las ecuaciones de Lagrange a partir de las leyes de Newton, haciendo intervenir ecuaciones de vínculos que permitan reducir la dimensionalidad de un problema, mediante la hipótesis de que las fuerzas de vínculo son ideales, y por lo tanto se anulan los trabajos virtuales que realizan. Sin embargo, hay otra teoría que desemboca en las ecuaciones de Lagrange, y que nace del **principio de Hamilton**, que sostiene que para llevar un sistema desde el estado $\{q_j(t_1)\}$ al $\{q_j(t_2)\}$ prefijados para los instantes t_1 y t_2 , la integral de acción

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \ L(q, \dot{q}, t)$$

donde L = T - V es la lagrangiana del sistema, alcanza un valor extremo (mínimo). La condición de extremo implica que al realizar variaciones $\delta q(t)$ alrededor de las soluciones q(t) que minimizan la expresión anterior debemos imponer la correspondiente condición de extremo

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \ L(q, \dot{q}, t) = 0 \ .$$

Antes de discutir en detalle este principio, notemos que la condición de extremo nos conduce al análisis de funcionales J que dependen de integrales de alguna función $f(y(x), \dot{y}(x), x)$

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \ f(y, \dot{y}, x) \ , \tag{7}$$

con x_1 y x_2 fijos, y lo mismo para los valores de $y(x_1)$ y $y(x_2)$. El objetivo de este análisis es encontrar un extremo para la integral J, de manera que alrededor de la solución y(x) que extremiza esta integral se cumple

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \ f(y, \dot{y}, x) \ .$$

Para imponer esta condición imaginamos variaciones $\delta y(x)$ continuas y derivables en torno de la solución (desconocida). A menudo suelen pensarse estas variaciones como todas las alternativas de sumar a la solución y(x, 0)cualquier curva $\eta(x)$ (continua y derivable) multiplicada por un escalar α , que es el que hacemos pequeño

$$y(x,\alpha) = y(x,0) + \alpha \eta(x) .$$

De este modo, las variaciones que queremos evaluar dependen del parámetro α , mediante el cual abarcamos todas las posibles curvas y conectándolos con cualquier $\eta(x)$. Las posibles variaciones que contemplamos pueden escribirse como

$$\delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \delta \alpha \; .$$

Realizamos entonces las posibles variaciones δy , teniendo presente que cada una de ellas tiene asociada una variación para la derivada $\delta \dot{y}$; para ello, intercambiando el proceso de derivación con el de integración, en base a las hipótesis planteadas

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \, \left[\frac{\partial f}{\partial y} \, \delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \, \delta \dot{y} \right] = 0 \, .$$

Notando que en el segundo sumando interviene $\delta \dot{y} = d(\delta y)/dx^{\dagger}$ integramos por partes

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \, \frac{\partial f}{\partial y} \, \delta y + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \, \delta y \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \delta y = 0 \; .$$

El segundo término de la derecha se anula puesto que prefijamos tanto $y(x_1)$ como $y(x_2)$, lo que implica que $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$. Entonces la condición de extremo equivale a exigir

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \; \left[\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right] \delta y = 0$$

para una variación δy arbitraria: la única posibilidad para que esto ocurra es que se anule el corchete, de manera que concluimos que la integral J (7) tiene un extremo si se cumple la ecuación de Euler

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \; .$$

Ilustremos esta idea con el cálculo de la mínima distancia entre dos puntos de un plano recorrida por una curva y(x). En este caso podemos escribir

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

donde identificamos $f(y, \dot{y}, x) = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$. Procediendo con la ecuación de Euler arribamos al resultado esperado (ejercicio).

Un ejemplo menos sencillo es el de encontrar la superficie de revolución mínima (alrededor del eje y) entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de un plano. Cada diferencial de curva ds genera un diferencial de área

$$2\pi x \,\mathrm{d}s = 2\pi x \sqrt{1 + \dot{y}^2} \mathrm{d}x \;,$$

de manera que podemos expresar el área como una integral

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \; x \sqrt{1 + \dot{y}^2}$$



[‡]Si pensamos a las curvas como $y(x, \alpha)$, estas serán derivadas parciales.

Identificando el integrando como la $f(y, \dot{y}, x)$ que involucra la ecuación de Euler, y teniendo los cuidados necesarios podemos resolver el problema, integrando para encontrar una curva *catenaria*

$$x = a \cosh \frac{y - b}{a} ,$$

donde las constantes $a \ge b$ están relacionadas con las condiciones impuestas a los extremos de la curva.

3.2. Principio de Hamilton

Como dijimos al comienzo de este capítulo, este principio, también llamado **principio de mínima acción**, establece que para llevar un sistema desde el estado $\{q_j(t_1)\}$ al $\{q_j(t_2)\}$ prefijados para los instantes t_1 y t_2 , la integral de acción

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \ L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \tag{8}$$

alcanza un valor extremo. Los cuidados para imponer la condición de extremo se detallaron en la sección anterior; en el planteo para sistemas mecánicos debemos tener en cuenta que las variaciones de *todas* las coordenadas y velocidades generalizadas —en lugar de tener una sola dimensión, como en los ejemplos anteriores. Dejando los detalles como ejercicio, la condición de extremo en este caso se transcribe como

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) = \dots = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j = 0 \,. \tag{9}$$

Nuevamente, como esta condición debe cumplirse para un conjunto arbitrario de variaciones $\{\delta q_j\}$, entonces debe anularse el corchete del penúltimo miembro, que casualmente coincide con las ecuaciones de Lagrange. Teniendo presente que estas ecuaciones proceden de postulados diferentes, se las suele invocar ingeniosamente como ecuaciones de Euler-Lagrange.

Podemos retomar ahora la idea (6) de que cuando a una lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ le añadimos la derivada total de una función G(q, t) con respecto a t se obtienen las mismas ecuaciones de movimiento. La demostración se dejó entonces como ejercicio, y puede realizarse derivando cuidadosamente ambos miembros de (6); ahora, conociendo el principio de Hamilton, esa demostración resulta directa, ya que la acción en términos de la lagrangiana L_2 es

$$S_2 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \ L_2(q, \dot{q}, t) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \ L(q, \dot{q}, t) + G(q(t_2), t_2) - G(q(t_1), t_1) \ ,$$

de donde la condición de extremo de S se traslada directamente a S_2 , arribando al resultado deseado (ejercicio).

3.3. Potenciales generalizados - Función de disipación

Hasta aquí hemos desarrollado nuestra presentación pensando siempre en sistemas conservativos, en los cuales las fuerzas son derivadas de un potencial $V(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N)$ que solo depende de las coordenadas. La elección de coordenadas generalizadas nos permitió extender nuestra descripción introduciendo las fuerzas generalizadas Q, que matemáticamente representan magnitudes análogas

$$F_i = -\nabla_i V = -\frac{\partial V}{\partial r_i} \qquad \leftrightarrow \qquad Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

A continuación veremos que es posible extender las ecuaciones de Lagrange (5) a diferentes situaciones, como aquellas en que las fuerzas se derivan (de una manera particular) de un potencial que también depende de las velocidades y del tiempo, además de las posiciones; e incluso extenderemos la aplicación del método desarrollado a algunos casos en que los sistemas están gobernados por fuerzas disipativas, que no pueden derivarse de un potencial pero satisfacen algunas condiciones específicas.

El caso particular en que las fuerzas generalizadas pueden derivarse de una función $U(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ mediante el procedimiento

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) \,, \tag{10}$$

las ecuaciones de Lagrange siguen siendo aplicables si tomamos L = T - U—razón por la cual llamamos potencial generalizado a la función U. De este modo, podemos incluir en nuestra descripción sistemas donde se cumplen las condiciones mencionadas.

3.3.1. Partícula en un campo electromagnético

Veamos una partícula de masa m y carga e sometida a un campo electromagnético. En el caso general debemos incluir la fuerza de Lorentz, que depende de la velocidad de la partícula

$$oldsymbol{F} = q\left(oldsymbol{E} + rac{1}{c}oldsymbol{v} imes oldsymbol{B}
ight)$$

donde los campos E y B se derivan de potenciales escalar $\phi(\mathbf{r},t)$ y vectorial $A(\mathbf{r},t)$

$$E = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} , \qquad B = \nabla \times A .$$

Elegimos las coordenadas cartesianas como coordenadas generalizadas, de manera que las componentes de las fuerzas generalizadas son las componentes cartesianas de F, como vimos en §2.4. Reescribiendo

$$oldsymbol{F} = q \left[-
abla \phi - rac{1}{c} rac{\partial oldsymbol{A}}{\partial t} + rac{1}{c} oldsymbol{v} imes (
abla imes oldsymbol{A})
ight] \; ,$$

podemos ayudarnos con las identidades (ejercicios)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad \mathrm{y} \qquad \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} \; ,$$

teniendo presente que el operador ∇ solamente afecta a r, de manera que resulta (ejercicio)

$$\boldsymbol{F} = q \left[-\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{c} \nabla (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) \right] = -\nabla \left(q\phi - \frac{q}{c} \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} \right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\nabla_{\boldsymbol{v}} \left(q\phi - \frac{q}{c} \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} \right) \right]$$

donde denotamos

$$abla_{oldsymbol{v}} \equiv rac{\partial}{\partial oldsymbol{v}} = \left(rac{\partial}{\partial v_x} + rac{\partial}{\partial v_y} + rac{\partial}{\partial v_z}
ight) \,,$$

y hemos tenido en cuenta que A solo depende de r, y no de v. La expresión anterior deja en claro que si elegimos

$$U = q \phi - \frac{q}{c} \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}$$

es posible derivar la fuerza mediante el procedimiento dado por (10), de manera que la lagrangiana para una partícula bajo la acción de un campo electromagnético se escribe como

$$L = T - U = \frac{m\boldsymbol{v}^2}{2} - q\,\phi + \frac{q}{c}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\;.$$

3.3.2. Fuerzas disipativas

Muchas veces no es posible obtener las fuerzas generalizadas como las derivadas de un potencial generalizado, en cuyo caso debemos completar la descripción agregando un sumando

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) + Q'_k$$

Entonces conviene retomar las ecuaciones de movimiento (4) a partir de la lagrangiana L = T - U, de manera que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k \qquad (k = 1, \dots, n) \; .$$

Esto puede aplicarse a situaciones frecuentes donde las fuerzas representan fricción en un medio viscoso, de manera que su magnitud es proporcional a las velocidades de las partículas. Si representamos estas fuerzas disipativas F'_i en cartesianas

$$F'_{ix} = -k_x v_{ix} , \qquad F'_{iy} = -k_y v_{iy} , \qquad F'_{iz} = -k_z v_{iz} , \qquad \qquad k_\alpha > 0 \quad (\alpha = x, y, z) ,$$

podemos introducir la función de disipación de Rayleigh

$$\mathscr{D} = \frac{1}{2} \sum_{1=1}^{N} \left(k_x \, v_{ix}^2 + k_y \, v_{iy}^2 + k_z \, v_{iz}^2 \right) \,,$$

de donde derivamos

$$oldsymbol{F}_i' = \left(-rac{\partial\mathscr{D}}{\partial v_{ix}}, -rac{\partial\mathscr{D}}{\partial v_{iy}}, -rac{\partial\mathscr{D}}{\partial v_{iz}}
ight) = -
abla_{oldsymbol{v}_i}\mathscr{D} = -rac{\partial\mathscr{D}}{\partial oldsymbol{v}_i}\,.$$

El trabajo por unidad de tiempo que realizan estas fuerzas es

$$\mathrm{d}W' = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}'_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}'_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i \,\mathrm{d}t \,.$$

de donde podemos computar la potencia disipada por las F'_i como

$$\frac{\mathrm{d}W'}{\mathrm{d}t} = -2\mathscr{D} \; .$$

En este caso, recordando que $\partial \mathbf{r}_i / \partial q_k = \partial \mathbf{v}_i \partial \dot{q}_k$,

$$Q'_{k} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}'_{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{i}}{\partial q_{k}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}'_{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_{i}}{\partial \dot{q}_{k}} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathscr{D}}{\partial \mathbf{v}_{i}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_{i}}{\partial \dot{q}_{k}} = -\frac{\partial \mathscr{D}}{\partial \dot{q}_{k}} ,$$

con lo cual podemos escribir las ecuaciones de movimiento en una forma similar a las anteriores como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathscr{D}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \; .$$

3.4. Principio de Hamilton para vínculos no holónomos

La elección de coordenadas generalizadas $\{q_k\}$ independientes es directa cuando los vínculos en juego son holónomos, de manera que siempre pueden expresarse los vectores posición de las partículas en términos de ellas, es decir, $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, ..., q_n)$ —recordemos que en ese caso, si el sistema dispone de *n* grados de libertad, contamos con *n* coordenadas generalizadas—. Cuando en cambio se trata de vínculos *no* holónomos, no es posible encontrar un conjunto $\{q_k\}$ de manera que se satisfagan automáticamente los vínculos. Sin embargo, es posible aplicar el principio de Hamilton a estos casos, tomando las precauciones pertinentes; arribaremos entonces a ecuaciones de movimiento similares a las de Euler-Lagrange, con algunos agregados.

Supongamos que escogimos un conjunto de $\mu > n$ coordenadas "casi" generalizadas, es decir, estas variables no son independientes, sino que se relacionan entre sí a través de p ecuaciones de vínculos no holónomos que tienen la forma diferencial

$$\sum_{k=1}^{\mu} a_{\ell k} \, \mathrm{d}q_k + a_{\ell t} \, \mathrm{d}t = 0 \qquad \qquad \ell = 1, \dots, p \;, \tag{11}$$

donde los coeficientes $a_{\ell k}$ y $a_{\ell t}$ son funciones de las $\{q_j\}$ y de t; es decir, consideramos los casos no holónomos donde en las ecuaciones de vínculo que relacionan a las coordenadas, el tiempo y las velocidades, estas últimas intervienen linealmente[§]. Escribimos para estos casos la lagrangiana L como si no hubiera vínculos, y sabemos que siempre debe satisfacerse el principio de Hamilton: procediendo como en el caso de vínculos holónomos, debe cumplirse

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \sum_{k=1}^{\mu} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k = 0$$

Pero en este punto no podemos afirmar que deba anularse el corchete dentro de la integral, ya que las $\{\delta q_k\}$ no son independientes.

Como los desplazamientos virtuales $\{\delta q_k\}$ se consideran para un instante t fijo, de las relaciones (11) deben cumplir

$$\sum_{k=1}^{\mu} a_{\ell k} \, \delta q_k = 0 \qquad \qquad \ell = 1, \dots, p \;. \tag{12}$$

Entonces buscamos un extremo de la acción con este conjunto de restricciones, para lo cual recurrimos al método de *multiplicadores de Lagrange*: este consiste esencialmente en permitir que las q_k se muevan como si en principio fueran independientes, para luego tener en cuenta que deben satisfacer los vínculos impuestos. Está claro que al respetar las condiciones (12) se cumple también

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \sum_{\ell=1}^p \lambda_\ell \left(\sum_{k=1}^\mu a_{\ell k} \, \delta q_k \right) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \sum_{k=1}^\mu \left(\sum_{\ell=1}^p \lambda_\ell \, a_{\ell k} \right) \delta q_k = 0$$

donde los multiplicadores de Lagrange λ_{ℓ} se introducen como incógnitas, cuya utilidad pronto se pondrá en evidencia. De este modo, si añadimos esta última igualdad a la condición anterior para extremar S, no modificamos la identidad que se debe cumplir

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \sum_{k=1}^{\mu} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell \, a_{\ell k} \right] \delta q_k = 0 \,. \tag{13}$$

Sabiendo que el número de grados de libertad es $n = \mu - p$, podemos elegir los desplazamientos virtuales $\delta q_1, \delta q_s, \dots, \delta q_{\mu-p}$ como independientes, y los δq_k restantes (p) se escribirán en función de ellos. De este modo elegimos los p multiplicadores λ_ℓ para que los últimos p coeficientes que acompañan a δq_k en las sumas anteriores se anulen $(k = \mu - p + 1, \mu - p + 2, \dots, \mu)$. Es decir los últimos p multiplicadores λ_ℓ se eligen para que se cumpla

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{\ell=1}^p \lambda_\ell \, a_{\ell k} = 0 \qquad k = \mu - p + 1 \,, \cdots \,, \mu \,.$$

Con esta elección, la condición (13) solo involucra las $\mu - p$ primeras δq_k , que son independientes y por lo tanto debe anularse cada uno de los coeficientes que las acompañan

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{\ell=1}^p \lambda_\ell \, a_{\ell k} = 0 \qquad k = 1, \cdots, \mu - p \, d_\ell$$

Así hemos construido un sistema de μ ecuaciones con μ incógnitas: las $\mu - p$ primeras q_k que consideramos como independientes, más los p multiplicadores de Lagrange λ_{ℓ}

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{\ell=1}^p \lambda_\ell \, a_{\ell k} \qquad k = 1, \cdots, \mu \, .$$

Una vez resuelto, para obtener todas las q_k además de los λ_ℓ podemos utilizar las p ecuaciones de vínculo (11), que pueden reescribirse como

$$\sum_{k=1}^{\mu} a_{\ell k} \, \dot{q}_k + a_{\ell t} = 0 \qquad \qquad \ell = 1, \dots, p$$

es decir contamos con $\mu + p$ ecuaciones para $\mu + p$ incógnitas.

3.4.1. Fuerzas de vínculo

Si en lugar de los vínculos hubiese un fuerzas generalizadas $\{Q'_k\}$ (ficticias) —no incluidas en la lagrangiana que obliguen a respetar las restricciones impuestas, habríamos planteado las ecuaciones presentadas más arriba

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k \;,$$

de manera que al comparar, resulta evidente que podemos identificar las componentes de las fuerzas (generalizadas) de vínculo como

$$Q'_k = \sum_{\ell=1}^p \lambda_\ell \, a_{\ell k} \; .$$

Vemos entonces que al incluir los vínculos no holónomos en el procedimiento, podemos encontrar las fuerzas de ligadura que intervienen en el sistema. Esta conclusión no solo es válida para los vínculos no holónomos: podemos repetir el razonamiento anterior para sistemas regidos por restricciones holónomas

$$f_{\ell}(q_1, q_2, \dots q_{\mu}, t) = 0$$
 $\ell = 1, \dots, p$

ya que al derivarlas con respecto al tiempo

$$\sum_{k=1}^{\mu} \frac{\partial f_{\ell}}{\partial q_k} \, \dot{q}_k + \frac{\partial f_{\ell}}{\partial t} = 0$$

toman la forma (11), identificando $a_{\ell k}$ y $a_{\ell t}$ como las derivadas parciales respectivas de cada término. Por supuesto, estas ecuaciones son integrables, pero las reescribimos para lograr una descripción que involucre las fuerzas de vínculo cuando estas sean de interés. Para fijar ideas con un vínculo holónomo simple, volvamos a aquel ejemplo de una masa puntual m "confinada" a moverse a lo largo de un alambre que rota con velocidad angular ω constante (§2.5). En lugar de restringir el problema a un solo grado de libertad, fingimos que la masa m puede desplazarse atravesando el alambre, y luego imponemos la condición de vínculo que ponga en evidencia el efecto de la fuerza de ligadura que la mantiene con $\theta = \omega t$. Eligiendo las coordenadas polares ρ y θ , aspiramos a encontrar dos funciones de movimiento, más la fuerza generalizada de vínculo, que solo tiene componente transversal al alambre.

La lagrangiana entonces cuenta solo con la energía cinética (no hay gravedad)

$$L = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{m}{2}\rho^2\dot{\theta}^2 ,$$

y debemos incorporar la condición de vínculo (una sola: p = 1)

$$f_1 = \theta - \omega t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\theta} - \omega = 0 \qquad \text{o bien} \qquad \mathrm{d}\theta - \omega \,\mathrm{d}t = 0$$

Comparando con (11), y notando que aquí solo intervien
e $\ell=1,$ identificamos

$$a_{1\rho} = 0$$
, $a_{1\theta} = 1$, $a_{1t} = -1$,

y advertimos que interviene un solo multiplicador de Lagrange λ_1 de modo que las ecuaciones de movimiento que obtenemos son

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = m \, \ddot{\rho} - m \, \rho \, \dot{\theta}^2 = \lambda_1 a_{1\rho} = 0 \qquad \mathrm{y} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m \, \rho^2 \, \ddot{\theta} + 2 \, m \rho \, \dot{\rho} \, \dot{\theta} - 0 = \lambda_1 a_{1\theta} = \lambda_1 \, .$$

Agregamos ahora la información provista por la ecuación de vínculo, que permite reemplazar $\dot{\theta} = \omega$ y por lo tanto $\ddot{\theta} = 0$, de manera que la primera de las ecuaciones nos devuelve

$$\ddot{\rho} = \omega^2 \rho \qquad \Rightarrow \qquad \rho(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$$

De aquí podemos derivar $\dot{\rho}$ y reemplazar en la segunda ecuación de movimiento, para encontrar la fuerza generalizada de vínculo que el alambre ejerce sobre la masa, obligándola a mantener su velocidad angular $\dot{\theta} = \omega$ constante

$$\lambda_1 = Q'_{\theta} = 2 \, m \, \omega^2 \left[A^2 e^{2\omega t} - B^2 e^{-2\omega t} \right]$$

(¿serán correctas las unidades de Q'_{θ} ?). Las condiciones iniciales imponen los valores para A y B.

Otro ejemplo para ilustrar la utilidad de los multiplicadores de Lagrange es el de un cilindro de radio a que rueda sin deslizar sobre otro cilindro fijo de radio b. Los ejes de estos cilindros son paralelos, perpendiculares al plano de la figura, y todo el sistema se encuentra bajo la acción de la gravedad. Si bien el sistema posee un solo grado de libertad, ya que el ángulo de giro del cilindro móvil es suficiente para determinar su estado, elegimos en este caso 3 coordenadas para describirlo: la posición del centro del cilindro móvil en coordenadas polares ρ y θ respecto de un referencial fijo en el centro del cilindro mayor, y su orientación mediante el ángulo de giro φ . Con estas elecciones, escribimos la lagrangiana para el cilindro móvil como



$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) + \frac{I_o}{2} \dot{\phi}^2 - m \, g \, \rho \cos \theta \; ,$$

donde sabemos que el momento de inercia baricéntrico del cilindro es $I_o = ma^2/2$. Agregamos las ecuaciones para los dos vínculos holónomos

$$\rho \dot{\theta} = a \dot{\varphi}$$
 (condición de rodadura), $\rho = a + b$ (contacto rígido).

Expresamos ambas condiciones en la forma (11) tomando $q_1 = \rho$, $q_2 = \theta$ y $q_3 = \varphi$ (ejercicio)

$$\rho \,\mathrm{d}\theta - a \,\mathrm{d}\varphi = 0 \;, \qquad \qquad \mathrm{d}\rho = 0$$



y

x

En la primera de estas relaciones identificamos $a_{1\rho} = 0$, $a_{1\theta} = b$, $a_{1\varphi} = -a$ y $a_{1t} = 0$, y en la segunda, $a_{2\rho} = 1$, $a_{2\theta} = a_{2\varphi} = a_{2t} = 0$. Las ecuaciones de movimiento resultan (ejercicio)

$$\begin{split} m \ddot{\rho} - m \rho \dot{\theta}^2 + m g \cos \theta &= \lambda_1 a_{1\rho} + \lambda_2 a_{2\rho} = \lambda_2 ,\\ m \rho^2 \ddot{\theta} + 2 m \rho \dot{\rho} \dot{\theta} - m g \rho \sin \theta &= \lambda_1 a_{1\theta} + \lambda_2 a_{2\theta} = \rho \lambda_1 ,\\ \frac{m a^2}{2} \ddot{\varphi} &= \lambda_1 a_{1\varphi} + \lambda_2 a_{2\varphi} = -a \lambda_1 . \end{split}$$

Imponiendo los vínculos

$$\dot{\rho} = 0$$
, $\ddot{\rho} = 0$, $(a+b)\dot{\theta} = a\dot{\varphi} \leftrightarrow \dot{\varphi} = \frac{a+b}{a}\dot{\theta}$,

podemos resumir las ecuaciones de movimiento como (ejercicio)

$$\frac{3}{2}(a+b)\ddot{\theta} - g\,\sin\theta = 0$$

Para la fuerza N normal al cilindro fijo encontramos (otro ejercicio)

$$N = Q'_{\rho} = \lambda_2 = m g \cos \theta - m(a+b) \dot{\theta}^2 ,$$

mientras que para la fuerza de roce f_r que garantiza la condición de rodadura (otro más),

$$f_r = \frac{Q'_\theta}{b+a} = -\frac{m g \sin \theta}{3} \; .$$

Vemos entonces que en el caso holónomo, en virtud de que las relaciones f_{ℓ} no involucran a las \dot{q} , puede definirse una lagrangiana "extendida" o "expandida"

$$\Lambda = L(q, \dot{q}, t) + \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_{\ell} f_{\ell}(q, t) ,$$

y considerar $\mu + p$ variables independientes $\xi_1 = q_1, \xi_2 = q_2, \dots, \xi_{\mu} = q_{\mu}, \xi_{\mu+1} = \lambda_1, \dots, \xi_{\mu+p} = \lambda_p$; de este modo se condensa la información como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_k} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\xi}_k} = 0 \qquad k = 1, \dots, \mu + p \;. \tag{14}$$

Es fácil comprobar que como los λ_{ℓ} no intervienen en Λ , parte de estas ecuaciones devuelven las relaciones de vínculo

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_{\mu+\ell}} = f_{\ell}(q,t) = 0 \; .$$

En muchos casos esta expresión puede resultar provechosa, y en otros no tanto, por lo que es conveniente utilizarla con prudencia. De cualquier modo, vale la pena dejar en claro que para obtener las ecuaciones de movimiento, aplicamos el principio de Hamilton imponiendo la condición de extremo a través de la inclusión de los vínculos

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[L(q, \dot{q}, t) + \sum_{\ell=1}^p \lambda_\ell f_\ell(q, t) \right] = 0 ,$$

donde tomamos q_1, \ldots, q_μ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ como variables independientes.

3.5. Constantes de movimiento

Llamaremos coordenadas cíclicas o coordenadas ignorables a aquellas q_k que no aparecen en la lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ —aunque seguramente las \dot{q}_k asociadas sí aparecen. Para cada coordenada generalizada q_k definimos el momento conjugado (o momento canónico conjugado) como

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \; .$$

Por supuesto, si trabajamos con coordenadas cartesianas, estos momentos no son otra cosa que las componentes del momento lineal (ejercicio).

La utilidad de estas definiciones se pone en evidencia al analizar las ecuaciones de movimiento (5)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \; ,$$

ya que si q_k es una coordenada cíclica, entonces el segundo término de la izquierda se anula, por lo cual encontramos que se conserva el momento generalizado

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k = \text{constante} \; .$$

Por ejemplo, cuando analizamos en coordenadas esféricas (r, θ, φ) un "potencial central", es decir, solo depende de la distancia $r \equiv |\mathbf{r}|$ al origen de coordenadas, la lagrangiana se expresa

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \, \dot{\varphi}^2 \right) - V(r) \; .$$

En este caso la coordenada φ es cíclica, de modo que se conserva el momento conjugado p_{φ}

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, \dot{\varphi} \qquad \text{constante} \; .$$

Se deja como ejercicio verificar que p_{φ} coincide con la componente z del momento angular de la partícula $J_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z$.

Consideremos ahora el ejemplo de la figura, consistente en un péndulo ideal de masa m y longitud ℓ , cuyo punto de suspensión puede deslizar libremente sobre un alambre horizontal. Eligiendo las coordenadas indicadas, la lagrangiana resulta

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{x}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 + 2 \ell \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta \right) + mg \cos \theta ,$$

de manera que la coordenada x es cíclica; por lo tanto

$$p_x = m \dot{x} + m \ell \dot{\theta} = \text{constante}$$
.

Justamente, como no hay fuerzas en la dirección horizontal, esperábamos que se conserve la componente x del momento lineal.

3.6. Simetrías y cantidades conservadas

Vemos entonces que cada vez que tenemos una coordenada cíclica q_k podemos hablar de una simetría del sistema, ya que provocamos cambios representados en q_k y vemos que la dinámica representada en la lagrangiana no cambia. Exactamente esto ocurre cuando analizamos traslaciones o rotaciones en las que sabemos que no se producen cambios en el sistema mecánico descripto.

Para completar el análisis introduzcamos el concepto de transformaciones infinitesimales, definidas a través de

$$oldsymbol{r}_i o oldsymbol{r}_i' = oldsymbol{r}_i + \delta oldsymbol{r}_i \quad, \qquad oldsymbol{v}_i o oldsymbol{v}_i' = oldsymbol{v}_i + \delta oldsymbol{v}_i$$

Como consecuencia de estas variaciones, la lagrangiana se modificará según

$$\delta L = L(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}'_i, t) - L(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i} \cdot \delta \boldsymbol{v}_i \right) \,.$$

Un ejemplo de este tipo de transformaciones es una "traslación rígida", en la que todas las partículas que componen el sistema sufren el mismo desplazamiento ε (pequeño)

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \forall i \qquad (\delta \boldsymbol{v}_i = 0) \; .$$

Otra transformación infinitesimal usual es la "rotación rígida", en la que todas las partículas cambian su orientación mediante un giro $\delta\theta$ alrededor de un eje de rotación $\hat{\boldsymbol{n}}$, como se señala en la figura. Utilizando la regla de la mano derecha para las rotaciones, podemos siempre asignar un vector $\delta\boldsymbol{\theta} = \delta\theta\,\hat{\boldsymbol{n}}$ a cada rotación infinitesimal, donde el carácter vectorial acompaña el sentido de rotación y todos los desplazamientos que se provocan son normales al eje de rotación:

$$\delta oldsymbol{r}_i = \delta oldsymbol{ heta} imes oldsymbol{r}_i \;, \qquad \delta oldsymbol{v}_i = \delta oldsymbol{ heta} imes oldsymbol{v}_i \;,$$





3.6.1. Simetría ante traslaciones

Supongamos un sistema que responde a la lagrangiana $L = T - V(\mathbf{r})$ además de ciertos vínculos holónomos $\{f_{\ell}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0\}$. Si tanto L como $\{f_{\ell}\}$ son invariantes ante traslaciones rígidas, entonces el momento lineal total del sistema se conserva ("homogeneidad en el espacio"). Para demostrarlo, podemos considerar la información contenida en la lagrangiana extendida

$$\Lambda = L(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) + \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_{\ell} f_{\ell}(\boldsymbol{r}, t) ,$$

la cual resulta invariante ante traslaciones arbitrarias:

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{\varepsilon} \qquad orall i \qquad \Rightarrow \qquad \delta \Lambda = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_{i=1}^N rac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{r}_i} = 0 \; .$$

Como ε (pequeño) es arbitrario, debe anularse el segundo factor de la expresión precedente, y como los vínculos son holónomos las derivadas de las f_{ℓ} se anulan, podemos recurrir a las ecuaciones de Lagrange (14) en términos de Λ

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{r}_{i}} = 0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_{i}} \right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_{i}} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_{i} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{P} = \text{constante} \;.$$

Como esta es una identidad vectorial, en general implica 3 condiciones sobre cada una de las componentes del impulso lineal total ($P_x = \text{constante}, P_y = \text{constante}, P_z = \text{constante}$). Puede ocurrir entonces que haya simetría respecto de traslaciones en alguna dirección pero no en otras, con lo cual solo se conservará la correspondiente componente del impulso lineal total.

3.6.2. Simetría ante rotaciones

Pensemos ahora un sistema descripto mediante la lagrangiana $L = T - V(\mathbf{r})$ y los vínculos holónomos $\{f_{\ell}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0\}$, como en el caso anterior. Cuando tanto L como $\{f_{\ell}\}$ son invariantes ante rotaciones rígidas, el momento angular total del sistema se mantiene constante ("isotropía del espacio"). Nuevamente, demostramos este "teorema" analizando los cambios provocados en la lagrangiana extendida por una rotación infinitesimal, que debe anularse por hipótesis

$$\delta\Lambda = 0 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial \boldsymbol{r}_{i}} \cdot (\delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}_{i}) + \frac{\partial\Lambda}{\partial \boldsymbol{v}_{i}} \cdot (\delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{v}_{i}) \right] = 0.$$
(15)

Teniendo presente que

$$rac{\partial\Lambda}{\partialoldsymbol{v}_i} = oldsymbol{p}_i \qquad \mathrm{y} \qquad rac{\partial\Lambda}{\partialoldsymbol{r}_i} = rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} igg(rac{\partial\Lambda}{\partialoldsymbol{v}_i} igg) = \dot{oldsymbol{p}}_i \;,$$

y recordando que ante permutaciones cíclicas vale la identidad $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$, la invariancia de Λ ante rotaciones (15) equivale a

$$\delta\boldsymbol{\theta} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{r}_{i} \times \dot{\boldsymbol{p}}_{i} + \dot{\boldsymbol{r}}_{i} \times \boldsymbol{p}_{i} \right) = \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\boldsymbol{r}_{i} \times \boldsymbol{p}_{i} \right) = \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{r}_{i} \times \boldsymbol{p}_{i} \right) = 0 \; .$$

Como esta identidad debe anularse para $\delta \theta$ arbitrario, entonces debe anularse el último factor

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{r}_{i}\times\boldsymbol{p}_{i}
ight)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=0$$

es decir, se conserva el momento angular total J. Nuevamente, esta es una identidad vectorial, es decir una condición que deben cumplir las 3 componentes J_x , J_y y J_z . Puede ocurrir que solo tengamos invariancia de Λ ante rotaciones en torno de cierto eje \hat{n} solamente, en cuyo caso se conservará la proyección de J sobre esa dirección

$$\delta\theta \,\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \delta\theta \,\frac{\mathrm{d}(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{J})}{\mathrm{d}t} \quad (\delta\theta \text{ arbitrario}) \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{J} \quad \text{constante} \;.$$

3.6.3. Simetría ante desplazamientos temporales

En el caso en que la lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, podemos decir que es invariante ante desplazamientos temporales. Si realizamos la descripción mediante las coordenadas generalizadas $\{q_k\}$, en estos casos la función energía —también llamada integral de Jacobi—

$$h = \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L$$

es una constante de movimiento. Para demostrarlo explicitamos

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n} \left[\ddot{q}_{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{k}} + \dot{q}_{k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{k}} \right) \right] - \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_{k}} \dot{q}_{k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{k}} \ddot{q}_{k} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \right] .$$

En virtud de las ecuaciones de Lagrange se cancelan los factores de \dot{q}_k , de manera que

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 0 = -\frac{\partial L}{\partial t} \; , \qquad$$

y como L = T - V no depende explícitamente del tiempo, concluimos que h es una cantidad conservada.

Cuando $V(\mathbf{r})$ es independiente de las velocidades y además solo contamos vínculos holónomos que no involucran explícitamente al tiempo

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, \dots, q_n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = 0 \; ,$$

entonces se cumple que

$$h = \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - (T - V) ,$$

de manera que h representa la energía E del sistema: como

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k,j} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j ,$$

es directo mostrar que (ejercicio)

$$h = 2T - V - (T - V) = T + V = E$$
.

En algunos sistemas puede cumplirse esta última identidad, aunque los vínculos holónomos involucren explícitamente el tiempo, es decir $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$: en esos casos también vale que h = E, aunque no se trata de una cantidad conservada.

Cuando actúan fuerzas disipativas como las descriptas en §3.3.2 mediante una función de disipación

$$\mathscr{D} = \frac{1}{2} \sum_{1=1}^{N} \left(k_x \, v_{ix}^2 + k_y \, v_{iy}^2 + k_z \, v_{iz}^2 \right) \,,$$

h no se conserva, y en cambio puede mostrarse que

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial \mathscr{D}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial t} \; .$$

Como dijimos arriba, si se cumple $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_n)$, es decir, *h* coincide con *E*, y dado que \mathscr{D} es una función homogénea de segundo grado en las velocidades, utilizando el teorema de Euler para funciones homogéneas, puede mostrarse que

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -2\mathscr{D} - \frac{\partial L}{\partial t}$$

3.7. Teorema de Noether (basado en el texto de Lemos)

Supongamos transformaciones infinitesimales que incluyan cualquier desplazamiento temporal y espacial, no necesariamente uniformes para todas las partículas de nuestro sistema

$$t \to t' = t + \varepsilon X(q, t)$$
, $q_i(t) \to q'_i(t') = q_i(t) + \varepsilon \Psi_i(q, t)$. (16)

Para un sistema descripto por la lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, el teorema de Noether postula:

Si la integral de acción no varía con esta transformación, es decir

$$\Delta S = \int_{t_1'}^{t_2} \mathrm{d}t' \ L\left(q'(t'), \frac{\mathrm{d}q'(t')}{\mathrm{d}t'}, t'\right) - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \ L\left(q(t), \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) = 0 \ ,$$

entonces la magnitud C

 $C = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\dot{q}_i X - \Psi_i \right) - L X \qquad \text{es una constante de movimiento.}$

Por ejemplo, si consideramos un desplazamiento temporal $t' = t + \varepsilon$ (únicamente) ante el cual L es invariante, tenemos X(q,t)=1 y $\Psi_i=0$: según el teorema de Noether se conserva la magnitud

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \cdot 1 - 0\right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \cdot 1 = h \; .$$

Es decir a partir de la invariancia temporal de L obtenemos la conservación de la "función energía", tal como habíamos demostrado explicitando dh/dt.

Otro ejemplo, eligiendo coordenadas cartesianas y considerando únicamente rotaciones rígidas infinitesimales $\delta \theta = \varepsilon \hat{n}$, de manera que X = 0 (t'=t) y $\Psi_1 = (\hat{n} \times r_1)_x$, $\Psi_2 = (\hat{n} \times r_1)_y$, $\Psi_3 = (\hat{n} \times r_1)_z$, $\Psi_4 = (\hat{n} \times r_2)_x$, \dots , $\Psi_{3N} = (\hat{n} \times r_N)_z$. Si L resulta invariante ante estas transformaciones, como no hay desplazamientos temporales, la integral de acción S no cambia (ejercicio). Por lo tanto, teniendo en cuenta que $\partial L/\partial \dot{q}_k$ es el momento generalizado p_k , podemos escribir la magnitud conservada como

$$\sum_{k=1}^{3N} rac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Psi_k = \sum_{i=1}^N rac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \cdot (\hat{oldsymbol{n}} imes oldsymbol{r}_i) = \hat{oldsymbol{n}} \cdot \sum_{i=1}^N (oldsymbol{r}_i imes oldsymbol{p}_i) \; ,$$

que implica la conservación del momento angular total de nuestro sistema.

La demostración del teorema se obtiene después de explicitar, a partir de (16), las derivadas

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = 1 + \varepsilon \,\dot{X} \,, \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{1 + \varepsilon \,\dot{X}} \simeq 1 - \varepsilon \,\dot{X}$$

у

$$\frac{\mathrm{d}q_i'(t')}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}q_i'(t')}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \left(\dot{q}_i + \varepsilon \,\dot{\Psi}_i\right) \left(1 - \varepsilon \,\dot{X}\right) = \dot{q}_i + \varepsilon \left(\dot{\Psi}_i - \dot{q}_i \,\dot{X}\right) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) = \dot{q}_i + \varepsilon \,\xi_i + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) + \varepsilon \,\xi_i + \varepsilon \,\xi_i + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) + \varepsilon \,\xi_i + \varepsilon \,$$

donde definimos $\xi = \Psi_i - \dot{q}_i X$. La invariancia de S ante la transformación implica

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\mathrm{d}t \left(1 + \varepsilon \, \dot{X}\right)}_{\mathrm{d}t'} L\left(q + \varepsilon \Psi, \dot{q} + \varepsilon \, \xi, t + \varepsilon \, X\right) - \int_{t_1}^{t_2} \!\mathrm{d}t \, L\left(q, \dot{q}, t\right) = 0 \, .$$

Teniendo en cuenta que ε es pequeño, desarrollamos en serie de Taylor el primer integrando, conservamos siempre hasta primer orden en ε , y cancelamos términos para llegar a (ejercicio)

$$\Delta S = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \xi_i \right] + \frac{\partial L}{\partial t} X + L \dot{X} \right\} = 0.$$

Como esto se cumple para ε , t_1 y t_2 arbitrarios, debe anularse el término entre llaves. Utilizando las ecuaciones de Lagrange para cancelar más términos (ejercicio) se arriba a que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i}} \left(\dot{q}_{i} X - \Psi_{i} \right) - L X \right] = 0 ,$$

que es lo que queríamos demostrar.

4. Integración de las ecuaciones de movimiento

4.1. Movimiento en una dimensión

Los problemas donde solo interviene un grado de libertad siempre pueden pensarse como movimientos unidimensionales. Tendremos entonces una única coordenada generalizada q para describir el sistema, y cuando la fuerza pueda derivarse de un potencial U(q) podremos escribir

$$L = \frac{1}{2}a(q)\,\dot{q}^2 - U(q)\,,$$

donde a(q) es una función de la coordenada que permite representar adecuadamente la energía cinética. En coordenadas cartesianas esta expresión es muy sencilla

$$L = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 - U(x)$$

y siempre podemos recurrir a la conservación de la energía

$$E = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + U(x)$$

De este modo, contamos con una ecuación diferencial que en principio permite integrar la función de movimiento x(t): en efecto, identificando

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2[E - U(x)]}{m}} \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - U(x)}} + \mathrm{cte} \; .$$

Podemos pensar que tanto la constante aditiva como la energía son las dos constantes de integración surgidas de la ecuación diferencial de segundo orden que habíamos encontrado mediante el principio de Hamilton, o las leyes de Newton. En estas expresiones se evidencia que el movimiento podrá ocurrir siempre que E > U(x). Los valores de x para los cuales U(x) = E son puntos de retorno, donde sabemos que se cumple $v = \dot{x} = 0$. En general, el movimiento unidimensional puede ser infinito, o bien finito, como en el caso de la figura con algún valor inicial $x_1 < x < x_2$. Claramente, en una dimensión, un movimiento finito implica un movimiento oscilatorio entre esos dos valores extremos x_1 y x_2 : el período de oscilación T puede calcularse a partir de la expresión anterior:



$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - U(x)}} \qquad (\text{ida y vuelta: } 2\times) \ .$$

Por ejemplo, en el caso de un péndulo simple de masa m y largo ℓ , podemos elegir nuestra coordenada como el apartamiento angular ϕ desde la vertical, y si las oscilaciones tienen amplitud ϕ_o ,

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\phi}^2 - mg\ell\cos\phi = -mg\ell\cos\phi_o ,$$

de manera que (ejercicio)

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\phi_o} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_o}} = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\phi_o} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{\sin^2(\phi_o/2) - \sin^2(\phi/2)}} \qquad \left(\cos\phi = 1 - 2\sin^2(\phi/2)\right) \,.$$

Mediante la sustitución sen $\xi = \operatorname{sen}(\phi/2)/\operatorname{sen}(\phi_o/2)$, podemos recurrir a la integral elíptica completa de primera especie

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \xi^2}}$$

para arribar a la expresión

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}K\left(\operatorname{sen}\frac{\phi_o}{2}\right)\,.$$

En el caso de pequeñas oscilaciones puede aproximarse $sen(\phi_o/2) \approx \phi_o/2$, y de la expansión de K para k pequeños resulta

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{\phi_o^2}{16} + \ldots \right)$$

4.2. Problema de dos cuerpos: potencial central

 $r_{\rm c}$

Con un procedimiento similar puede obtenerse mucha información para el llamado problema de dos cuerpos: dos partículas de masas m_1 y m_2 que se conectan mediante un potencial de interacción que solo depende de la distancia entre ellas. Veremos a continuación que la descripción se simplifica notoriamente separando el centro de masa, para lo cual partimos de la expresión

$$L = \frac{1}{2}m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_2^2 - U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) ,$$

donde se evidencia que solo estamos considerando fuerzas de interacción entre las masas m_1 y m_2 (no existen otras fuerzas). Definiendo

$$R \equiv \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$
 y $r \equiv r_1 - r_2$

podemos expresar

$${f r}_1 = {m R} + rac{m_2}{m_1 + m_2} {m r} \qquad {f y} \qquad {m r}_2 = {m R} - rac{m_1}{m_1 + m_2} {m r} \; ,$$

de modo que

$$L = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu \, \dot{r}^2 - U(r) \; , \label{eq:L}$$

donde denotamos $r = |\mathbf{r}|, M = m_1 + m_2$ es la masa total del sistema, y definimos la masa reducida como

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad \left(\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

El primer término de la expresión previa corresponde a la energía cinética de traslación del sistema, la que se mantiene constante debido a que no contamos con fuerzas externas al sistema, por lo que resulta irrelevante para nuestra descripción y será omitida de ahora en adelante: esto es equivalente a pensar nuestra descripción desde un sistema inercial que acompaña al centro de masa

$$L = \frac{1}{2}\mu \, \dot{r}^2 - U(r) \; ,$$

o lo que es lo mismo, estudiamos la evolución de una partícula de masa μ descripta mediante el vector posición r, bajo la acción de un potencial que solo depende de la distancia r al origen de coordenadas, es decir una partícula en un *campo central*. La fuerza ejercida sobre esta partícula se deriva del potencial

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} \hat{\boldsymbol{r}} \; .$$

Como este potencial exhibe simetría bajo rotaciones alrededor de cualquier eje, sabemos que se conserva el momento angular del sistema

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\mu} \, \boldsymbol{\dot{r}} \; ,$$

de manera que los vectores r y p siempre se mantienen normales al vector J, o lo que es lo mismo, el movimiento se desarrolla en un plano perpendicular a J. Encaramos nuestra descripción mediante coordenadas polares r y ϕ , en virtud de las simetrías mencionadas, con lo cual la lagrangiana se escribe

$$L = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - U(r) \; .$$

Claramente la coordenada ϕ es cíclica, lo que implica que el momento conjugado p_{ϕ} se conserva

$$p_{\phi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \dot{\phi}$$
 constante.

Aquí vale la pena hacer un par de aclaraciones. Por un lado, como dijimos en §3.5, p_{ϕ} coincide con la componente z del momento angular J: dado que el movimiento se desarrolla en un plano, donde se encuentran r y p, la única componente no nula del momento angular es justamente $J_z = p_{\phi}$. Por otro lado, conviene enfatizar que los momentos generalizados no necesariamente representan componentes del vector momento lineal en alguna dirección: justamente, este es el caso cuando las coordenadas generalizadas escogidas son ángulos, de manera que la componente del momento lineal p según la dirección de crecimiento de ϕ no coincide con $p \cdot \hat{\phi}$, aunque obviamente están relacionados (¿cómo?).

Podemos interpretar también el momento generalizado p_{ϕ} como proporcional al área barrida por unidad de tiempo en la evolución de la órbita. En efecto, en un intervalo dt, podemos aproximar el diferencial de área df barrido por el vector \boldsymbol{r} como la del "triángulo" señalado en la figura, es decir,

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{2} r \, r \, \mathrm{d}\phi \, ,$$

de modo que la *velocidad areolar*, es decir el área abarcada por unidad de tiempo resulta

$$\dot{f} = rac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = rac{r^2 \dot{\phi}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad J_z = J \; (= |J|) = 2\mu \dot{f} \qquad (2^\mathrm{a} \; \mathrm{ley \; de \; Kepler})$$

Retomando la idea del movimiento en una dimensión, y contemplando la conservación de la energía E además del momento angular J

$$E = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) + U(r) = \frac{1}{2}\mu r^2 + \underbrace{\frac{J^2}{2\mu r^2} + U(r)}_{U_{\rm ef}},$$

podemos pensar en un movimiento unidimensional (ficticio) descripto por la coordenada r, y regido por un potencial efectivo

$$U_{\rm ef} = U(r) + \frac{J^2}{2\mu r^2}$$

en el que interviene, además del potencial real U(r), una energía centrífuga (ficticia) $J/(2\mu r^2)$. La velocidad asociada a la coordenada r es por lo tanto

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U(r)] - \frac{J^2}{\mu^2 r^2}}$$

de modo que podemos separar variables como en el caso unidimensional §4.1 (ejercicio)

$$t = \int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U(r)] - \frac{J^2}{\mu^2 r^2}}} + \mathrm{cte} \,. \tag{17}$$

Como $J = \mu r^2 \dot{\phi} = \text{cte}$, podemos sustituir $d\phi = J/(\mu r^2) dt$ en las integrales anteriores, y así arribar a una expresión para la trayectoria (ejercicio)

$$\phi = \int dr \frac{J/r^2}{\sqrt{2\mu[E - U(r)] - J^2/r^2}} + \text{cte} .$$
(18)

Entonces podemos reproducir el análisis realizado para el movimiento unidimensional en muchos aspectos. Por ejemplo, cuando se cumple

$$U(r^*) + \frac{J^2}{2\mu r^{*2}} \left(= U_{\rm ef}(r^*) \right) = E$$

encontramos los *puntos de retorno*, que deben considerarse con precaución, ya que la condición anterior implica que $\dot{r} = 0$, aunque no necesariamente $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = 0$: cuando el momento angular $J = \mu r^2 \dot{\phi}^2 \neq 0$, hay una componente transversal no nula en la velocidad de la partícula.

También como en el caso del movimiento unidimensional, dependiendo de la relación entre $U_{\rm ef}(r)$ y del valor de E, el movimiento puede resultar infinito o acotado. En el caso en que resulte finito, las órbitas no necesariamente serán cerradas: para que ello cumpla es necesario computar que el desplazamiento angular entre los puntos de retorno

$$\Delta \phi = 2 \int_{r_{\rm min}}^{r_{\rm max}} {\rm d}r \frac{J/r^2}{\sqrt{2\mu [E-U(r)] - J^2/r^2}} \ , \label{eq:phi}$$

y verificar que en algún giro se cierra la trayectoria, es decir, debe cumplirse

$$\Delta \phi = \frac{m}{n} 2\pi$$
, $m, n \in \mathbb{N}$.



De este modo, al cabo de n períodos la masa μ retorna el recorrido que ya ha transitado. Si bien no lo demostraremos aquí, vale la pena notar que solo hay dos campos centrales que admiten órbitas cerradas: un campo proporcional a 1/r y un campo proporcional a r^2 . En breve estudiaremos el primero de ellos con cierto detalle, mientras que el segundo caso constituye un oscilador armónico tridimensional.



Como la energía centrífuga diverge cerca $r \to 0$ (obviamente cuando $J \neq 0$)

$$\frac{J^2}{2\mu r^2} \underset{r\to 0}{\to} \infty \; ,$$

en general no es posible la caída al centro del potencial. Dado que siempre debe valer la desigualdad

$$E \ge U_{\rm ef}(r) = U(r) + \frac{J^2}{2\mu r^2} ,$$

para que ocurra la caída al centro debe cumplirse que (ejercicio)

$$r^2 U(r) < -\frac{J^2}{r o 0} - \frac{J^2}{2\mu}$$
.

Esto significa que $U \to -\infty$ como $-\alpha/r^2$, donde la constante α cumple $\alpha > J^2/(2\mu)$, o bien como $-1/r^n$, con n > 2.

4.3. El problema de Kepler

El caso del potencial $U(r) \propto 1/r$ es sumamente importante, porque en particular representa el campo gravitatorio universal y el campo coulombiano. Sabemos que las fuerzas serán proporcionales a $1/r^2$, y en este desarrollo nos concentraremos en un campo atractivo

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad (\alpha > 0) \; .$$

Vemos que el movimiento puede ser acotado o no, dependiendo del signo de la energía mecánica

$$E > 0$$
: movimiento infinito $E < 0$: movimiento finito

Para este potencial es posible integrar la ecuación de la trayectoria, resultando (ejercicio)

$$\phi = \arccos \frac{\frac{J}{r} - \frac{\mu \alpha}{J}}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2 \alpha^2}{J^2}}} + \text{cte} ,$$

de modo que si elegimos el sistema de coordenadas para que la constante se anule cuando $\phi = 0$, podemos definir

$$p = \frac{J^2}{\mu \alpha}$$
 y $e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{\mu \alpha^2}}$

para expresar la trayectoria de manera compacta (ejercicio) como

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\phi$$

Esta es la ecuación para una sección cónica, donde el parámetro e es la excentricidad y 2p se denomina *latus rectum* de la órbita. En esta expresión el *perihelio* o *periápside*, es decir, el punto más próximo al centro, se corresponde con $\phi = 0$. Conviene discernir entre las diferentes condiciones que se pueden cumplir entre los parámetros que determinan estas trayectorias.

Cuando E < 0, entonces e < 1, en cuyo caso la órbita es cerrada y define una elipse como la de la figura. Evidentemente se trata de un movimiento acotado, donde puede mostrarse que los semiejes mayor y menor resultan respectivamente (ejercicios)

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|} \quad (\text{mayor}) \qquad \qquad \mathbf{y} \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{J}{\sqrt{2\,\mu\,|E|}} \quad (\text{menor})$$





Vemos que el semieje mayor de las órbitas elípticas depende solamente de E, pero no del valor de J. Por otro lado, los puntos de retorno de las órbitas elípticas son (ejercicios)

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e)$$
, $r_{\max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e)$

que obtenemos como las raíces de la ecuación $U_{\rm ef} = E$.

El valor mínimo posible para la energía se corresponde con excentricidad e = 0 (ejercicios)

$$E_{\min} = -\frac{\mu \alpha^2}{2J^2}$$
 (¿por qué?) $\Rightarrow e = 0$

de manera que la elipse es en realidad una circunferencia. También podemos computar el período de las órbitas de manera directa si recordamos que $J = 2\mu \dot{f}$ (constante), de manera que al cabo de un período T se completa el barrido del área f de la órbita, es decir $JT = 2\mu f$; como se trata de una elipse, $f = \pi ab$, de manera que despejamos el período (ejercicio)

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} = \pi \alpha \sqrt{\frac{\mu}{2 |E|^3}}$$

Notamos que también se cumple que T depende solo de E, y no de J.

Cuando E > 0, el movimiento será infinito, y de las expresiones anteriores inferimos que en este caso se cumple e > 1: las trayectorias son hipérbolas con foco en el centro de potencial. En este caso la distancia del perihelio al origen resulta (ejercicio)

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} = a(e-1) ,$$

mientras que el "semieje" de la hipérbola puede escribirse como

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} = \frac{\alpha}{2 E} \ .$$

Finalmente, cuando E = 0, la excentricidad se iguala a la unidad, e = 1, y la trayectoria resulta una parábola, en la que se cumple

$$r_{\rm mín} = \frac{p}{2}$$

El movimiento corresponde a la partícula en reposo para $r = \infty$.

4.3.1. Funciones de movimiento

Para el caso de *órbitas elípticas*, es decir con E < 0, e < 1, podemos retomar la expresión (17) para escribir

$$t = \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \int \frac{r \, \mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{\alpha}{|E|}r - r^2 - \frac{J^2}{2\mu|E|}}} = \sqrt{\frac{\mu a}{\alpha}} \int \frac{r \, \mathrm{d}r}{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}} \, .$$

Mediante la sustitución $r - a = -ae \cos \xi$ obtenemos (ejercicio)

$$t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} (\xi - e \, \operatorname{sen} \xi) + \operatorname{cte} \,,$$

donde podemos elegir t = 0 para que la cte = 0. Esto significa que puede utilizarse la parametrización

$$r = a(1 - e\cos\xi)$$
, $t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\xi - e\,\sin\xi)$

mediante la cual la partícula pasa por el perihelio $(r_{mín})$ en t = 0. Las coordenadas cartesianas pueden expresarse de manera directa si elegimos los ejes como en la figura anterior, resultando (ejercicio)

$$x = a(\cos \xi - e)$$
, $y = a\sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} \xi$.

De aquí queda claro que una revolución se completa cuando ξ recorre valores entre 0 y 2π .



Para E > 0, es decir cuando ocurren trayectorias hiperbólicas, cálculos análogos a los anteriores nos conducen

$$r = a(e\cosh\xi - 1)$$
, $t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(e \operatorname{senh} \xi - \xi)$,

de manera que el parámetro ξ varía de $-\infty$ a $+\infty$, y

$$x = a(e - \cosh \xi)$$
, $y = a\sqrt{1 - e^2} \operatorname{senh} \xi$.

4.3.2. Vector de Lenz

Para potenciales $U = \alpha/r$, con cualquier signo en α , el vector de Laplace-Runge-Lenz

$$\mathscr{L} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{J} + \frac{\mu \alpha \boldsymbol{r}}{r}$$

resulta una constante de movimiento, como puede demostrarse derivando esta expresión con respecto al tiempo, y teniendo presente que las ecuaciones de movimiento implican (ejercicio) $\mu \dot{\boldsymbol{v}} = \alpha \boldsymbol{r}/r^3$. La dirección de este vector puede visualizarse evaluándolo en el perihelio: se deja como ejercicio verificar que apunta a lo largo del segmento que une el foco con el perihelio, y su magnitud resulta $\mu \alpha e$.

4.4. Teorema virial

Siempre que un sistema abarca una región finita en el espacio y es gobernado por un potencial U(r) que es una función homogénea de las coordenadas, pueden relacionarse de manera sencilla los valores medios (a lo largo del tiempo) de las energías cinética y potencial.

Como la energía cinética T es cuadrática en las velocidades v_i , sabemos que se cumple

$$\sum_{i} \boldsymbol{v}_{i} \cdot \boldsymbol{p}_{i} = \sum_{i} \boldsymbol{v}_{i} \cdot \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{v}_{i}} = 2T ,$$

y como

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad 2T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_i \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{p}_i \right) - \sum_i \boldsymbol{r}_i \cdot \dot{\boldsymbol{p}}_i \;.$$
(19)

Teniendo presente las ecuaciones de Euler-Lagrange, sabemos también que

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = rac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i}$$

Al realizar un promedio temporal \overline{f} de cualquier función del tiempo que pueda escribirse como

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \; ,$$

podemos expresar para el valor medio al cabo de un intervalo τ suficientemente grande

$$\bar{f} = \frac{1}{\tau} \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau \mathrm{d}t \ f(t) = \frac{1}{\tau} \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau \mathrm{d}t \ \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} \ ,$$

de manera que siempre que F sea acotada, este promedio temporal se anula, ya que el denominador de la expresión anterior diverge. Volviendo a nuestro sistema de partículas que evoluciona en una región finita del espacio, es decir tanto los r_i como los p_i permanecen acotados, entonces al tomar el valor medio de (19) debe cumplirse

$$2\bar{T} = 0 - \overline{\sum_{i} \boldsymbol{r}_{i} \cdot \dot{\boldsymbol{p}}_{i}} = + \overline{\sum_{i} \boldsymbol{r}_{i} \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_{i}}}$$

Cuando U es una función homogénea de grado k de las coordenadas, es decir $U(\beta \mathbf{r}) = \beta^k U(\mathbf{r})$, entonces se cumple

 $\boldsymbol{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i} = k \, U(\boldsymbol{r}_i)$ (teorema de Euler),

de manera que

$$2\bar{T} = k\,\bar{U}$$

y como $\overline{T} + \overline{U} = \overline{E} = E$ (constante), entonces se cumple (ejercicio)

$$ar{U} = rac{2}{k+2}E$$
 y $ar{T} = rac{k}{k+2}E$.

Estas identidades se conocen con el nombre de "teorema virial", y expresan las relaciones que deben cumplir las energías medias de un sistema mecánico.

a

4.5. Dispersión de partículas o *scattering*

Cuando dos partículas interactúan pueden suscitarse diferentes cambios en ellas, como deflexiones angulares, conversión de energía en radiación, ionizaciones atómicas, etc. Estas dispersiones son sumamente útiles para extraer información básica sobre la naturaleza de esas interacciones. Entre las muchas posibilidades, nosotros nos concentraremos en los *choques elásticos*, es decir, consideramos que no se producen cambios internos en las partículas que interactúan, y por lo tanto se conserva la energía mecánica del sistema.

La elección del centro de masa para desarrollar la descripción de la interacción entre dos partículas resulta muy conveniente; en particular, como se trata de un problema de 2 cuerpos, sabemos que la evolución del centro de masa (\mathbf{R}) puede separarse de la masa reducida μ , descripta mediante el vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Consideraremos el caso (bastante general) en que el potencial de interacción solamente depende de la distancia $r = |\mathbf{r}|$ entre las partículas, es decir un problema de potencial central para la masa μ . Ya vimos que su trayectoria será simétrica con respecto a la posición de máximo acercamiento entre ellas ($r_{mín}$); tomamos entonces como medida de la dispersión el ángulo de deflexión

$$\psi = |\pi - 2\phi_o| ,$$

 v_{∞} $\psi = |\pi - 2\phi_0|$ $\psi = |\pi - 2\phi_0|$ $d\rho$ $d\rho$ $d\psi$ $d\Omega = 2\pi \operatorname{sen} \psi \, d\psi$

donde sabemos evaluar la desviación angular entre la posición en $r = \infty$ y $r_{mín}$ mediante (18)

$$\phi_o = \int_{r_{\rm min}}^{\infty} \mathrm{d}r \frac{J/r^2}{\sqrt{2\mu E - 2\mu U(r) - J^2/r^2}}$$

Recordemos que r_{min} es justamente una raíz del radicando del denominador, de manera que tendremos que estar precavidos ante las posibles integrales que enfrentemos.

Cuando μ se halla suficientemente lejos del centro de potencial (las partículas se encuentran suficientemente alejadas entre ellas), esperamos que $U \to 0$ cuando $r \to \infty$, por lo que su energía es solo cinética

$$E = \frac{1}{2}\mu v_{\infty}^2$$

Con esta notación, podemos evaluar también la magnitud del momento angular $J = \mu \rho v_{\infty}$ donde el apartamiento ρ indicado en la figura anterior se denomina parámetro de impacto. Entonces podemos resolver la integral

$$\phi_o = \int_{r_{\rm min}}^{\infty} \mathrm{d}r \frac{\rho/r^2}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{\mu v_\infty^2}}}$$
(20)

para relacionar $\psi \operatorname{con} \rho$.

En los experimentos diseñados para analizar fenómenos de dispersión o scattering suele utilizarse un haz de partículas idénticas monoenergético, es decir, todas ellas incidiendo sobre un blanco con v_{∞} , distribuidas uniformemente en la superficie normal a v_{∞} . Se cuenta entonces con n partículas por unidad de área, y nos interesa asociar el intervalo $[\rho, \rho + d\rho]$ con las dispersiones en $[\psi, \psi + d\psi]$. Cuando es válida la aproximación de potencial central, las partículas contenidas en la corona delimitada por los parámetros ρ y $\rho + d\rho$ se deflectarán en un entorno infinitesimal alrededor de ψ : se acostumbra a identificar esa dispersión mediante el área frontal (infinitesimal) de dicha corona

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,,$$

que representa la contribución a la sección eficaz de dispersión asociada a las deflexiones ocurridas en el intervalo $[\psi, \psi + d\psi]$ correspondiente. En el experimento se colectan $dN = n \times 2\pi \rho d\rho$ partículas deflectadas entre los conos de semiángulos ψ y $\psi + d\psi$, y se efectúa el cociente dN/n, que tiene unidades de área, y resulta igual a $d\sigma$: vemos entonces que $d\sigma$ es representativa de la probabilidad de tener una interacción que disperse a las partículas cumpliendo alguna condición, que en este caso es el ángulo de deflexión.

Si conocemos la relación explícita $\rho(\psi)$, podemos reescribir ese aporte a la sección eficaz diferencial como

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi \,\rho(\psi) \left| \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\psi} \right| \mathrm{d}\psi \;,$$

donde el módulo $|\cdot|$ es importante, ya que en general la función $\rho(\psi)$ es decreciente. La relación anterior suele expresarse en términos del ángulo sólido $d\Omega = 2\pi \operatorname{sen} \psi \, d\psi$ que contiene todas las partículas asociadas al mismo ángulo de deflexión

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\rho(\psi)}{\mathrm{sen}\,\psi} \left| \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\psi} \right| \mathrm{d}\Omega \; .$$

En base a estas definiciones, se denomina sección eficaz diferencial a la magnitud $d\sigma/d\Omega$, y análogamente, sección eficaz total a la cantidad

$$\sigma = \int \mathrm{d}\sigma \; .$$

Sección eficaz de Rutherford

El caso particular $U = \alpha/r$ ha sido muy estudiado porque se aplica, por ejemplo, a la dispersión de partículas cargadas por un campo coulombiano. La integral (20) se puede resolver, resultando (ejercicio)

$$\phi_o = \arccos \frac{\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2 \rho}\right)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \rho^2 = \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \phi_o \ .$$

Como $\phi_o = \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2} \Rightarrow \rho(\psi) = \frac{\alpha}{\mu v_{\infty}^2} \cot \frac{\psi}{2}$, y derivando llegamos a la fórmula de Rutherford

 α

$$\mathrm{d}\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos(\psi/2)}{\mathrm{sen}^3(\psi/2)} \,\mathrm{d}\psi = \left(\frac{\alpha}{2 \,\mu \, v_\infty^2}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{sen}^4(\psi/2)}$$

Notemos que esta sección eficaz no depende del signo de α , es decir, proporciona el mismo resultado para un potencial atractivo o repulsivo de igual intensidad en valor absoluto.

5. Pequeñas oscilaciones

5.1. El oscilador armónico simple

De los cursos básicos sabemos resolver el problema unidimensional correspondiente al potencial armónico

$$V(x) = \frac{1}{2}k x^2$$
 $(k > 0)$,

como es el caso de una partícula sometida a un resorte de constante k, donde la posición se representa mediante la coordenada x asociada al estiramiento del resorte. Si bien sabemos resolver el problema utilizando la mecánica newtoniana, al realizar la descripción mediante el formalismo lagrangiano llegamos a la misma ecuación de movimiento; en efecto, a partir de la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k\,x^2$$

obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\mathrm{d}\dot{x}} \right) - \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = m \, \ddot{x} + k \, x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \, .$$

La solución general de esta ecuación diferencial de 2º grado puede escribirse

$$x(t) = a\cos(\omega t + \alpha) ,$$

donde la amplitud a y la fase α son constantes reales, y quedan determinadas por las condiciones iniciales. Esta solución es equivalente a elegir dos soluciones independientes, $\operatorname{sen}(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$, y combinarlas como solución general $c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t)$ utilizando constantes reales c_1 y c_2 . También podemos escoger la representación compleja, en cuyo caso la solución general se escribe

$$x(t) = \operatorname{Re}\left[z e^{i\omega t}\right]$$
,

de manera que la amplitud $z = a e^{i\alpha t}$ es una constante compleja, es decir guarda información sobre las dos constantes reales de más arriba.

5.2. Varios grados de libertad

Mediante un tratamiento análogo al caso unidimensional, podemos plantear para el caso general de un sistema conservativo con n grados de libertad

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{n} M_{k\ell} \, \dot{q}_k \, \dot{q}_\ell - V(q_1, \dots, q_n) \; ,$$

donde definimos

$$M_{k\ell} = \sum_{i} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\ell} = M_{\ell k} \; .$$

Estamos interesados en potenciales para los que valga una aproximación cuadrática, es decir, con algún mínimo local que representará una posición de equilibrio *estable* $q^{(0)} = (q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$, de manera que se cumple

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)_{q^{(0)}} = 0 , \qquad V_{k\ell} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell}\right)_{q^{(0)}} = V_{k\ell} \neq 0 , \qquad k = 1, \dots, n .$$

Alrededor del punto de equilibrio elegiremos los apartamientos (pequeños) $\eta_k \equiv q_k - q_k^{(0)}$ como coordenadas generalizadas para escribir la expansión

$$V(q_1, \dots, q_n) = V(q^{(0)}) + \sum_k \left(\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)_{q^{(0)}} \eta_k + \frac{1}{2} \sum_{k, \ell} V_{k\ell} \eta_k \eta_\ell .$$

La condición de equilibrio estable se garantiza si

$$\sum_{k,\ell} V_{k\ell} \eta_k \eta_\ell > 0 \qquad \forall (\eta_1, \dots, \eta_n) \neq (0, \dots, 0) .$$
(21)

Entonces, tomando $V(q^{(0)}) = 0$ y teniendo presente que $\dot{\eta}_k = \dot{q}_k$, podemos escribir

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{n} M_{k\ell} \, \dot{\eta}_k \, \dot{\eta}_\ell - \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} V_{k\ell} \, \eta_k \, \eta_\ell \; .$$

Esta lagrangiana es una función homogénea de 2º grado en $\dot{\eta}_k$ y en η_k , y conviene notar que tanto $M_{k\ell}$ como $V_{k\ell}$ son simétricas, estando ambas evaluadas en las posiciones de equilibrio $q^{(0)} \leftrightarrow \eta^{(0)} = 0$. Las derivadas de esta expresión se pueden construir de manera directa (ejercicio)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_j} = \frac{1}{2} \left[\sum_{\ell} M_{j\ell} \, \dot{\eta}_\ell + \sum_k M_{kj} \, \dot{\eta}_k \right] = \sum_k M_{jk} \, \dot{\eta}_k \,,$$

y análogamente

$$-rac{\partial L}{\partial \eta_j} = \sum_k V_{jk} \, \eta_k \; .$$

Con estas expresiones las ecuaciones de movimiento resultan

$$\sum_{k} (M_{jk} \, \ddot{\eta}_k + V_{jk} \, \eta_k) = 0 \qquad j = 1, \dots, n \; ,$$

y constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas: buscamos soluciones

$$\eta_j^o(t) = \operatorname{Re}\left[z_j^o e^{i\omega t}\right] \;,$$

es decir oscilaciones colectivas con una única frecuencia ω : ¿existirán soluciones así? Al sustituir en las ecuaciones de movimiento obtenemos (ejercicio)

$$\sum_{k} \left(V_{jk} - \omega^2 \, M_{jk} \right) z_k^{\circ} = 0 \,, \tag{22}$$

y estos elementos pueden pensarse como componentes de vectores columna η° y z° , de modo que en notación matricial

$$\left(\mathsf{V} - \omega^2 \mathsf{M}\right) \boldsymbol{z}^\circ = 0 \ . \tag{23}$$

Tenemos entonces un problema de autovalores, para el cual exigimos soluciones z° no triviales imponiendo

$$|\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{M}| = \det \begin{pmatrix} V_{11} - \omega^2 M_{11} & V_{12} - \omega^2 M_{12} & \cdots \\ V_{21} - \omega^2 M_{21} & V_{22} - \omega^2 M_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = 0.$$
(24)

De aquí surge una ecuación característica de grado n para las posibles frecuencias; esta tendrá n raíces positivas ω_{ℓ}^2 —pueden ser diferentes—, correspondientes a las frecuencias propias ω_{ℓ} del sistema ($\ell = 1, ..., n$). Concluimos entonces que sí son posibles las oscilaciones colectivas con una única frecuencia. Cada frecuencia propia tiene asociado un autovector $\boldsymbol{\zeta}^{(\ell)}$ (real), y cada solución

$$\boldsymbol{\eta}^{(\ell)}(t) = \operatorname{Re}\left[\boldsymbol{\zeta}^{(\ell)}e^{i\omega_{\ell}t}\right] \;,$$

constituye un "modo normal" de oscilación; como las matrices son simétricas, siempre podemos elegir estos autovectores linealmente independientes. Una solución general del problema puede contener diferentes modos normales, según cuáles sean las condiciones iniciales; si utilizamos coeficientes complejos $A_{\ell} = C_{\ell} e^{i\phi_{\ell}}$ ($C_{\ell}, \phi_{\ell} \in \mathbb{R}$) la solución general se expresa

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \sum_{\ell=1}^{n} A_{\ell} \, \boldsymbol{\zeta}^{(\ell)} \, e^{i\omega_{\ell} t} \,. \tag{25}$$

Para no distra
ernos con esa preocupación, detengámonos a demostrar que los autovalores
 ω^2 originados en la ecuación característica son efectivamente positivos. Para ello multipliquemos (22) por el complejo conjugado de
 z_j y sumemos sobre j

$$\sum_{j,k} \left(V_{jk} - \omega^2 M_{jk} \right) z_k \, \bar{z}_j = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega^2 = \frac{\sum_{j,k} V_{jk} \, z_k \, \bar{z}_j}{\sum_{j,k} M_{jk} \, z_k \, \bar{z}_j}$$

El numerador de esta expresión pareciera tener componente imaginaria, pero notemos que si tomamos su complejo conjugado, y recordamos que la matriz real V es simétrica $(V_{jk} = V_{kj})$,

$$\sum_{j,k} V_{jk} \, z_k \, \bar{z}_j = \sum_{j,k} V_{kj} \, \bar{z}_k \, z_j = \sum_{j,k} V_{jk} \, z_k \, \bar{z}_j \; ,$$

lo que significa que el complejo conjugado del numerador es idéntico al numerador de la expresión anterior para ω^2 , es decir es real. Lo mismo ocurre con el denominador, pues los M_{jk} conforman una matriz real y simétrica, de manera que en las expresiones anteriores estamos siempre trabajando con cantidades reales. Además, habíamos enfatizado en (21) que V es una matriz definida positiva, y lo mismo ocurre con M (T es cuadrática en las v_i), de manera que se cumple que $\omega^2 > 0$. Sin duda nos alivia saber que los valores de ω son reales, ya que, como dijimos, esperábamos soluciones oscilatorias.

Al resolver la diagonalización mencionada, lo que estamos haciendo equivale a un cambio de base, donde los nuevos elementos se comportan como osciladores desacoplados, ya que en esa representación solo intervendrán elementos diagonales en (23). Las nuevas "coordenadas normales" son entonces combinación lineal de las $\{\eta_j\}$ originales, y podemos pasar de una representación a la otra como si tal cosa : la componente j-ésima (parte real) de la solución general (25) se escribe entonces en términos de las componentes j-ésimas $\zeta_j^{(\ell)}$ de los autovectores $\boldsymbol{\zeta}^{(\ell)}$

$$\eta_j(t) = \sum_{\ell=1}^n C_\ell \,\zeta_j^{(\ell)} \cos(\omega_\ell \,t + \phi_\ell) \qquad j = 1, \dots, n \,.$$

Las 2n constantes C_{ℓ} y ϕ_{ℓ} quedan determinadas al conocer las condiciones iniciales para el sistema descripto.

Veamos el ejemplo ilustrado en la figura, donde 2 péndulos idénticos de masa m y longitud ℓ están conectados mediante un resorte de constante k y longitud natural d_o , igual a la separación de los puntos de suspensión de los péndulos. Para escribir la lagrangiana primero expresamos adecuadamente la energía cinética como

$$T = \frac{m\,\ell^2}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{m\,\ell^2}{2}\dot{\theta}_2^2 \approx \frac{m}{2}\dot{\eta}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{\eta}_2^2$$

mientras que para la energía potencial tenemos

$$V = \frac{k}{2} \left[(d_o + \eta_2 - \eta_1) - d_o \right]^2 + mg \left[\ell (1 - \cos \theta_1) + \ell (1 - \cos \theta_2) \right] \approx \frac{k}{2} (\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{mg}{2\ell} (\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{mg}{2\ell} (\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{mg}{2\ell} (\eta_1^2 + \eta_2^2) \right]$$



donde hemos aproximado el estiramiento como si el resorte se mantuviera siempre en posición horizontal (puede mostrarse que descartamos correcciones mucho menores que las preservadas). Entonces, la lagrangiana para pequeñas oscilaciones

$$L = T - V = \frac{m}{2} \left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{mg}{\ell} (\eta_1^2 + \eta_2^2) + k(\eta_2 - \eta_1)^2 \right]$$

nos permite obtener las matrices

$$\mathsf{M} = \left(\begin{array}{cc} m & 0\\ 0 & m \end{array}\right) \,, \qquad \mathsf{V} = \left(\begin{array}{cc} \frac{mg}{\ell} + k & -k\\ -k & \frac{mg}{\ell} + k \end{array}\right)$$

(¿por qué no falta un factor 2 en las diagonales?). Planteamos la ecuación característica para las frecuencias propias del sistema a partir de (24), y también los autovectores asociados (ejercicio)

$$\left| \mathbf{V} - \omega^{2} \mathbf{M} \right| = \left(\frac{mg}{\ell} + k - m\omega^{2} \right)^{2} - k^{2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \omega_{1} = \sqrt{\frac{g}{\ell}} & \rightarrow \quad \boldsymbol{\zeta}^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \\ \omega_{2} = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}} & \rightarrow \quad \boldsymbol{\zeta}^{(2)} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix} \end{cases}$$

Las constantes (reales) α y β en principio son arbitrarias (¿por qué, quéloque significan?). De todas maneras, vemos que en el primer modo normal las dos masas se mueven en fase, de modo que el resorte mantiene siempre su longitud natural d_o y no agrega fuerzas a las que rigen a cada uno de los péndulos, que se comportan como péndulos simples cuya frecuencia $\omega_1 = \sqrt{g/\ell}$ podíamos anticipar. En el segundo modo normal, las masas evolucionan en oposición de fase con idéntica amplitud, en cuyo caso la fuerza restitutiva del resorte se agrega como si tuviera una constante 2k: para cada apartamiento el estiramiento se duplica gracias a un apartamiento simétrico al otro extremo del resorte.

Pronto veremos que las constantes idénticas en los autovalores sugieren la elección de coordenadas normales

$$\xi_1 \propto \eta_1 + \eta_2$$
 y $\xi_2 \propto \eta_1 - \eta_2$

de manera que tanto las expresiones para la energía cinética como para la potencial contienen términos en los que solo intervienen $\dot{\eta}_1, \eta_1$ o $\dot{\eta}_2, \eta_2$ por separado, es decir, osciladores desacoplados.

5.3. Coordenadas normales

Para encontrar una manera sistemática de hallar las coordenadas normales, es conveniente reescribir las ecuaciones anteriores en forma vectorial/matricial

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{n} M_{k\ell} \dot{\eta}_k \dot{\eta}_\ell - \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} V_{k\ell} \eta_k \eta_\ell \qquad \leftrightarrow \qquad L = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathsf{M} \, \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \mathsf{V} \, \boldsymbol{\eta} \qquad \text{con} \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de movimiento con esta notación se escriben

$$\sum_{k} \left(M_{jk} \, \ddot{\eta}_k + V_{jk} \, \eta_k \right) = 0 \qquad j = 1, \dots, n \qquad \leftrightarrow \qquad \mathsf{M} \, \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathsf{V} \, \boldsymbol{\eta} = 0 \; ,$$

de manera que este formalismo es equivalente al anterior. Las coordenadas normales que buscamos se corresponden con una transformación (o cambio de base) $\boldsymbol{\eta} = A\boldsymbol{\xi}$ ($\boldsymbol{\xi}^T A^T = \boldsymbol{\eta}^T$) que diagonalicen las ecuaciones de movimiento, de manera que tengamos osciladores desacoplados. Para ello notemos que si elegimos la matriz de transformación A de manera que su ℓ -ésima columna sea el autovector $\boldsymbol{\zeta}^{(\ell)}$ encontrado

$$A_{k\ell} \equiv \zeta_k^{(\ell)}$$

y definimos el producto escalar entre dos vectores η y μ arbitrarios como

$$(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\eta}^T \mathsf{M} \, \boldsymbol{\mu} = \sum_{j,k} \eta_j M_{jk} \, \mu_k \;, \tag{26}$$

podemos escoger las $\boldsymbol{\zeta}^{(\ell)}$ para conformar una base ortonormalizada, es decir,

$$\delta_{\ell m} = \left(\boldsymbol{\zeta}^{(\ell)}, \boldsymbol{\zeta}^{(m)}\right) = \sum_{j,k} \zeta_j^{(\ell)} M_{jk} \, \zeta_k^{(m)} = \sum_{j,k} A_{j\ell} \, M_{jk} \, A_{km} = \left(\mathsf{A}^T \mathsf{M} \, \mathsf{A}\right)_{\ell m} \, .$$

Esta identidad muestra que en la nueva representación la matriz $M' = A^T M A$ resulta diagonal, ya que

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathsf{M} \, \dot{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \underbrace{\mathsf{A}}^T \mathsf{M} \, \mathsf{A} \, \dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \, \mathsf{M}' \, \dot{\boldsymbol{\xi}} \, .$$

Analicemos ahora qué ocurre con la matriz asociada al potencial cuando se aplica la transformación A. Como se satisface

$$\sum_{k} \left(V_{jk} - \omega^2 M_{jk} \right) \zeta_k^{(\ell)} = 0 \; ,$$

la componente *j*-ésima de esta identidad cumple

$$\sum_{k} V_{jk} \underbrace{\zeta_{k}^{(\ell)}}_{A_{k\ell}} = \omega_{\ell}^{2} \sum_{k} M_{jk} \underbrace{\zeta_{k}^{(\ell)}}_{A_{k\ell}} \qquad \Rightarrow \qquad (\mathsf{V} \mathsf{A})_{j\ell} = \omega_{\ell}^{2} (\mathsf{M} \mathsf{A})_{j\ell} .$$

Nos interesan los elementos de $V' = A^T V A$

$$\left(\mathsf{A}^T \mathsf{V} \mathsf{A}\right)_{i\ell} = \sum_j A_{ji} (\mathsf{V} \mathsf{A})_{j\ell} = \omega_\ell^2 \sum_j A_{ji} (\mathsf{M} \mathsf{A})_{j\ell} = \omega_\ell^2 \left(\mathsf{A}^T \mathsf{M} \mathsf{A}\right)_{i\ell} = \omega_\ell^2 \,\delta_{i\ell} \;,$$

con lo cual esta matriz también es diagonal en la nueva representación. Entonces disponemos de la transformación A que diagonaliza nuestras ecuaciones y por lo tanto los osciladores resultan desacoplados cuando los describimos mediante las coordenadas normales $\{\xi_i\}$, que se obtienen mediante

$$\boldsymbol{\xi} = \mathsf{A}^{-1} \boldsymbol{\eta} \qquad \leftrightarrow \qquad \boldsymbol{\eta} = \mathsf{A} \, \boldsymbol{\xi} \; .$$

Vale la pena aclarar que en virtud del producto escalar adoptado, la transformación A en general no es unitaria.

Veamos esta construcción retomando el ejemplo de los dos péndulos unidos por un resorte, en el cual a matriz M ya es proporcional a la identidad (M = mI). Para obtener las coordenadas normales, primero exigimos que los autovectores cumplan con la normalización $\|\boldsymbol{\zeta}^{(1,2)}\|^2 = 1$ impuesta por nuestro producto escalar (26), de modo que (ejercicio)

$$\boldsymbol{\zeta}^{(1)} = rac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{\zeta}^{(2)} = rac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Entonces resulta (otro ejercicio)

$$\mathsf{A}^{-1} = \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 1 & -1 \end{array} \right) \ .$$

con lo cual (otro)

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \mathsf{A} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 - \xi_2 \end{pmatrix} \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_2 \\ \eta_2 - \eta_2 \end{pmatrix}$$

Entonces sustituimos en la lagrangiana para utilizar las nuevas coordenadas, obteniendo una expresión que corresponde a osciladores desacoplados (otro más)

$$L = \frac{1}{2}\dot{\xi}_1^2 - \frac{1}{2}\frac{g}{\ell}\xi_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\xi}_2^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}\right)\xi_2^2$$

5.4. Oscilaciones forzadas

Cuando se añade al potencial armónico un campo externo variable, abandonamos la idea de oscilaciones "libres" descriptas hasta aquí. Avanzamos en la descripción de este tipo de evolución, aunque siempre en el régimen de pequeñas oscilaciones: el campo externo es suficientemente débil como para mantener a nuestro sistema en un entorno de pequeños apartamientos alrededor de las posiciones de equilibrio.

Restringiéndonos a un problema en una dimensión, además del potencial $\frac{1}{2}kx^2$, consideramos un campo externo $U_e(x,t)$ dependiente del tiempo que —bajo las condiciones mencionadas— puede aproximarse como

$$U_e(x,t) = U_e(0,t) + x \left. \frac{\partial U_e}{\partial x} \right|_{x=0} = U_e(0,t) + x F(t) ,$$

donde evidentemente el factor F(t) solo depende de t, ya que está evaluado en la posición de equilibrio x=0: justamente se trata de la fuerza agregada en ese punto. La lagrangiana resultante

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - U_e(0,t) - xF(t)$$

nos permite obtener la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m} ,$$
(27)

donde $\omega^2 = k/m$ corresponde a caso de oscilaciones libres, es decir con F(t) = 0. Esta ecuación diferencial admite una solución homogénea $x_h(t)$ (el célebre oscilador armónico), a la que podemos sumar una solución particular $x_p(t)$ que dependerá de la naturaleza del campo externo aplicado. Estudiaremos aquí el caso

$$F(t) = f\cos(\gamma t + \beta) \, ,$$

para el cual la solución particular puede expresarse como

$$x_p(t) = b\cos(\gamma t + \beta) .$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, para los casos $\gamma \neq \omega$ resulta (ejercicio)

$$b = \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}$$

de modo que la solución general se escribe

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}\cos(\gamma t + \beta) .$$

Las constantes $a \ y \ \alpha$ que dan establecidas por las condiciones iniciales, y el movimiento resultante será una combinación de oscilaciones con frecuencias $\omega \ y \ \gamma$.

Para analizar el caso de resonancia, es decir cuando $\gamma = \omega$, conviene escribir la solución general como (ejercicio)

$$x(t) = c\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \left[\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)\right],$$

ya que la indeterminación en el segundo término cuando $\gamma \rightarrow \omega$ se puede evaluar mediante la regla de L'Hôpital, obteniendo (ejercicio)

$$x(t) = c\cos(\omega t + \alpha) + \frac{ft}{2m\omega}\sin(\omega t + \beta)$$

Vemos entonces que, en el caso de resonancia, la amplitud de la oscilación crece linealmente con el tiempo, tendiendo a apartar el sistema del régimen de pequeñas oscilaciones: al cabo de cierto tiempo perderá validez el desarrollo anterior.

Podemos describir la evolución cerca de la condición de resonancia, es decir, tomando $\gamma = \omega + \varepsilon$, con ε pequeño. En ese caso escribimos la solución compleja como

$$x(t) = A e^{i\omega t} + B e^{i(\omega+\varepsilon)t} = (A + B e^{i\varepsilon t}) e^{i\omega t}$$

donde las amplitudes complejas son $A = a e^{i\alpha}$ y $B = b e^{i\beta}$. Como ε es pequeño, el factor $(A + B e^{i\varepsilon t})$ varía poco al cabo de un período $T = 2\pi/\omega$ de la oscilación libre: seguimos teniendo entonces pequeñas oscilaciones de frecuencia ω y amplitud variable $C = |A + B e^{i\varepsilon t}|$. Como se cumple que (ejercicio)

$$C^{2} = a^{2} + b^{2} + 2 ab\cos(\varepsilon t + \beta - \alpha) ,$$

vemos que esta amplitud varía peródicamente con frecuencia ε y se cumple que $|a - b| \le C \le a + b$, fenómeno conocido como "pulsaciones" de estas oscilaciones forzadas.

En un caso general en que la fuerza exterior F(t) no es necesariamente sinusoidal, la ecuación de movimiento (27) como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}+i\,\omega\,x)-i\,\omega\,\underbrace{(\dot{x}+i\,\omega\,x)}_{\xi(t)}=\dot{\xi}-i\,\omega\,\xi=\frac{F(t)}{m}$$

La solución de la ecuación homogénea (F(t) = 0) es

$$\xi_h = D \, e^{i\omega t} \qquad (D \, \text{cte})$$

lo que sugiere expresar la solución general en términos de una función D(t) dependiente de t como

$$\xi(t) = D(t) e^{i\omega t} ,$$

que satisfará^{\dagger} la ecuación (ejercicio)

$$\dot{D}(t) = \frac{F(t)}{m} e^{-i\omega t} \; . \label{eq:D}$$

Entonces podemos escribir para la solución general

$$\xi(t) = e^{i\omega t} \left[\int_0^t \mathrm{d}t' \; \frac{F(t')}{m} \, e^{-i\omega t'} + \xi_o \right] \; ,$$

donde $\xi_o = \xi(t=0)$.

La aparición de esta fuerza dependiente de t hace que la energía no se conserve. Si en $t = -\infty$ elegimos E = 0 y $\xi(-\infty) = 0$, la energía total consumida por la fuerza externa puede calcularse a partir de

$$|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{m^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \ F(t') \, e^{-i\omega t'} \right|^2 \, ,$$

ya que

$$E - E(t = -\infty) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right) - 0 = \frac{m}{2}|\xi|^2 = \frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \ F(t') \ e^{-i\omega t'}\right|^2 \ .$$

Vemos entonces que la energía consumida se corresponde con la componente de Fourier de F(t) según la frecuencia ω . Si F(t) actúa durante un intervalo breve (frente a la magnitud de $1/\omega$), podemos considerar $e^{-i\omega t} \simeq 1$ de manera que

$$E = \frac{1}{2m} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \ F(t') \right]^2 \,.$$

El corchete del miembro de la derecha no es otra cosa que el impulso adquirido gracias a la fuerza externa, con lo cual esta expresión para la energía ganada por el sistema debería resultarnos de lo más aceptable.

6. Cuerpo rígido

Un cuerpo rígido se define como un sistema de partículas cuyas distancias relativas no varían. Si bien esta es una aproximación, ya que los sistemas físicos en condiciones normales sufren modificaciones, al menos a nivel microscópico, a nivel macroscópico estos cambios minúsculos pueden despreciarse en general, obteniéndose una descripción mecánica satisfactoria.

En la física clásica la materia es considerada como un continuo, de manera que cuando representamos sumatorias sobre todas las masas que componen un sistema, típicamente damos la descripción en términos de la densidad másica ρ del sistema, y de la geometría que rige al mismo

$$\sum_{i} (\cdot) m_{i} \quad \rightarrow \quad \int \mathrm{d} V \ \rho (\cdot) \ .$$

Como siempre, para dar la descripción de la dinámica de nuestro sistema debemos recurrir a un sistema inercial, desde el cual realizamos la caracterización del movimiento del centro de masa (\mathbf{R}), y desde allí damos cuenta de los cambios de orientación del conjunto de masas que componen al sistema. Como vimos en §3.6, los cambios de orientación infinitesimales pueden escribirse como rotaciones de magnitud d ϕ alrededor de un eje $\hat{\mathbf{n}}$ que imprime el carácter vectorial a las rotaciones infinitesimales que representamos como d ϕ . Si denotamos con \mathbf{r} las posiciones de las partículas referidas al centro de masa, sabemos que con respecto a un sistema fijo al laboratorio, los cambios infinitesimales d \mathbf{r}_{lab} de esas posiciones se relacionan con los cambios d \mathbf{r} mediante

$$\mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{lab}} = \mathrm{d}\mathbf{R} + \mathrm{d}\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}$$
.

Pensando en el proceso de límite involucrado en la derivada que interviene en la definición de velocidad, obtenemos la expresión conocida de aquellas buenas épocas

 $m{v}_{
m lab} = m{V} + m{\Omega} imes m{r}$. $ext{traslación rotación}$

6.1. Tensor de inercia

Al evaluar la energía cinética para nuestro sistema (respecto del referencial en el laboratorio), vimos que se separan naturalmente las contribuciones de la traslación y la rotación, de manera que (ejercicio)

$$T = \sum_{i} \frac{1}{2} m_{i} \boldsymbol{v}_{i}^{2} = \frac{1}{2} \sum_{i} m_{i} \left(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_{i} \right)^{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i} m_{i} \right) V^{2} + \boldsymbol{V} \cdot \left(\boldsymbol{\Omega} \times \sum_{i} m_{i} r_{i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i} m_{i} \left(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_{i} \right)^{2}$$
$$= \frac{1}{2} M V^{2} + 0 + \frac{1}{2} \sum_{i} m_{i} \left[\Omega^{2} r_{i}^{2} - \left(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{r}_{i} \right)^{2} \right] ,$$

donde el primer término corresponde a la energía cinética de traslación, mientras que el último refleja la de rotación. Aquí introducimos el tensor de inercia, definido en términos de las componentes $x_{i,\ell}$ ($\ell = 1, 2, 3$) de los vectores r_i

$$I_{jk} = \sum_{i} m_i \left[\left(\sum_{\ell} x_{i,\ell}^2 \right) \delta_{j,k} - x_{i,j} x_{i,k} \right],$$

que en algunos casos puede reducirse a un escalar, como veremos más adelante. La expresión para la energía cinética de rotación resulta entonces

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2} \sum_{i} m_i \left[\left(\sum_{j,k} \Omega_j \Omega_k \, \delta_{j,k} \right) \left(\sum_{\ell} x_{i,\ell}^2 \right) - \left(\sum_{j} \Omega_j x_{i,j} \right) \left(\sum_{k} \Omega_k x_{i,k} \right) \right] \\ = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \Omega_j \Omega_k \left\{ \sum_{i} m_i \left[\left(\sum_{\ell} x_{i,\ell}^2 \right) \delta_{j,k} - x_{i,j} \, x_{i,k} \right] \right\} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \Omega_j \Omega_k \, I_{jk} \, ,$$

donde Ω_j señala la componente *j*-ésima del vector Ω . Entonces, podemos construir la lagrangiana de un cuerpo rígido sometido a un potencial U mediante la expresión

$$L = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k} I_{jk} \Omega_j \Omega_k - U$$

Es importante señalar que nos restringimos a casos de campos conservativos, en los que la energía potencial solo depende de las posiciones de las partículas: como estas se mueven rígidamente, es decir se trasladan como un todo o cambian sus orientaciones pero no sus distancias relativas, U depende entonces de la ubicación del centro de masa (\mathbf{R}) y de 3 ángulos que definen los cambios de la orientación del sistema, como especificaremos más adelante.

El tensor de inercia es entonces simétrico, y tiene la forma

$$I_{jk} = \begin{pmatrix} \sum_{i} m_{i} \left(y_{i}^{2} + z_{i}^{2} \right) & -\sum_{i} m_{i} x_{i} y_{i} & -\sum_{i} m_{i} x_{i} z_{i} \\ -\sum_{i} m_{i} x_{i} y_{i} & \sum_{i} m_{i} \left(x_{i}^{2} + z_{i}^{2} \right) & -\sum_{i} m_{i} y_{i} z_{i} \\ -\sum_{i} m_{i} x_{i} z_{i} & -\sum_{i} m_{i} y_{i} z_{i} & \sum_{i} m_{i} \left(x_{i}^{2} + y_{i}^{2} \right) \end{pmatrix}.$$

Los elementos diagonales $I_{xx} = I_{11}$, $I_{yy} = I_{22}$, $I_{zz} = I_{33}$ son los momentos de inercia con respecto a cada eje. Si bien en estas expresiones pensamos en añadir masas individuales, ya dijimos que en nuestra descripción consideramos la materia como un continuo, que nos lleva a pensar en elementos de masa infinitesimales dm relacionados con los elementos de volumen $dV = d^3r$ a través de la densidad másica, es decir

$$\mathrm{d}m = \rho \,\mathrm{d}V \qquad \rightarrow \qquad I_{jk} = \int \mathrm{d}^3 r \,\rho(\mathbf{r}) \left[\left(\sum_{\ell} x_{\ell}^2\right) \delta_{j,k} - x_j \,x_k \right] \,.$$

El hecho de que el tensor de inercia sea simétrico nos indica que puede diagonalizarse, cambiando a una base ortogonal, o reorientando los ejes coordenados x_1 , x_2 y x_3 : estos ejes de la representación diagonal se corresponden con los ejes principales de inercia, y señalamos los elementos diagonales como I_1 , I_2 e I_3 , denominados momentos principales de inercia. Cuando elegimos estos ejes para nuestra descripción, la energía cinética de rotación toma la forma sencilla

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2} \left(I_1 \,\Omega_1^2 + I_2 \,\Omega_2^2 + I_3 \,\Omega_3^2 \right) \,. \tag{28}$$

A un cuerpo rígido que tiene 3 momentos principales de inercia diferentes, lo denominamos trompo asimétrico (o peonza asimétrica). Aquel que tiene dos iguales, diferentes del tercero, es decir, $I_1 = I_2 \neq I_3$, se llama trompo

simétrico (o *peonza* simétrica). El trompo esférico es el sólido cuyos 3 momentos principales son iguales. En cualquier caso, siempre se cumple que (ejercicio)

$$I_j \leq I_k + I_\ell \qquad (j \neq k \neq \ell \neq k) \;.$$

Las geometrías simétricas de un sistema más o menos homogéneo pueden facilitar la elección de los ejes principales de inercia. Por ejemplo cuando hay un plano de simetría, el centro de masa estará contenido en ese plano, que alojará 2 ejes principales, mientras que el tercero será normal a él. Otro ejemplo sencillo se da cuando un sistema consta solamente de partículas coplanares, eligiendo el eje x_3 normal a ese plano, se cumplirá que (ejercicios) $I_1 = \sum_i m_i y_i^2$, $I_2 = \sum_i m_i x_i^2$, y también $I_3 = I_1 + I_2$. Si consideramos el caso de un cuerpo que posee un eje de simetría, este contendrá al centro de masa, y además será un eje principal de inercia (los otros dos serán normales a este). Como último ejemplo, consideremos un sistema de partículas colineales, que disponemos sobre el eje x_3 , de manera que (ejercicios) $I_1 = I_2 = \sum m_i z_i^2$, mientras que $I_3 = 0$: estos sistemas solo poseen 2 grados de libertad para la rotación, ya que no tiene sentido pensar en una rotación alrededor del eje x_3 .

En algunas situaciones resulta conveniente describir la rotación alrededor de un eje que <u>no</u> pase por el centro de masa del sistema, como suele ocurrir cuando se cumple la condición de rodadura que describimos en §3.4.1. En esos casos se puede recurrir al **teorema de Steiner**: si el vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ conecta el centro de masa (\mathbf{R}) con el punto \mathbf{r}_G que tomamos como "centro de giro" ($\mathbf{a} = \mathbf{r}_G - \mathbf{R}$), el momento de inercia $I^{(G)}$ respecto de \mathbf{r}_G se relaciona con el momento de inercia baricéntrico $I^{(o)}$, es decir alrededor de un eje de rotación que pasa por el centro de masa, mediante la expresión

$$I^{(G)} = I^{(o)} + M \left(a^2 \delta_{j,k} - a_j a_k \right) ,$$

donde a es la distancia entre ambos ejes de giro.

6.2. Momento angular

Al analizar el movimiento de un cuerpo rígido siempre buscamos descomponer la traslación de las rotaciones. Naturalmente en la descripción de las rotaciones aparece el momento angular (de espín) J, que también puede relacionarse con el tensor de inercia, ya que (ejercicio)

$$oldsymbol{J} = \sum_{i} m_i \, oldsymbol{r}_i imes oldsymbol{v}_i = \sum_{i} m_i \, oldsymbol{r}_i imes oldsymbol{\Omega} imes oldsymbol{r}_i = \sum_{i} m_i \, oldsymbol{r}_i^2 \, oldsymbol{\Omega} - oldsymbol{r}_i \, (oldsymbol{r}_i \cdot oldsymbol{\Omega}) ig] \, .$$

de manera que la componente j (= x, y, z) del momento angular se puede expresar como

$$J_j = \sum_i m_i \left[\left(\sum_{\ell} x_{i,\ell}^2 \right) \Omega_j - x_{i,j} \sum_k x_{i,k} \Omega_k \right] = \sum_k \Omega_k \sum_i m_i \left[\left(\sum_{\ell} x_{i,\ell}^2 \right) \delta_{j,k} - x_{i,j} x_{i,k} \right] = \sum_k I_{jk} \Omega_k ,$$

es decir

 $J = | \Omega |$.

Como l es un tensor, vemos que no siempre el vector momento angular es paralelo a la velocidad angular Ω . Sin embargo, cuando elegimos nuestra descripción según los ejes principales de inercia, se debe cumplir

$$J_1 = I_1 \Omega_1 , \qquad J_2 = I_2 \Omega_2 , \qquad J_3 = I_3 \Omega_3 .$$
 (29)

Evidentemente, en los casos en que el sólido gire alrededor de un eje principar de inercia, J será un vector paralelo a Ω .

Como vimos en §1 y mostraremos en la siguiente sección, si el movimiento ocurre libre de fuerzas externas, entonces se conserva el momento angular, y por lo tanto el vector velocidad angular es constante: no solo en magnitud, sino también el eje (y el sentido) de giro. Si analizamos el caso de un trompo esférico, es decir, un sólido con $I_1 = I_2 = I_3$, puede pensarse que cualquier rotación se efectúa alrededor de un eje principal de inercia (¿por qué?); para un trompo esférico entonces siempre se cumple $J \parallel \Omega$, con $J = I \Omega = I_1 \Omega$.

Un cuerpo conformado por partículas colineales se denomina también rotador, y ya vimos que $I_1 = I_2 = I$, e $I_3 = 0$. Para este sistema, cuando el eje de rotación es perpendicular al eje del rotador x_3 , también vale que $J = I \Omega$ (¿por qué?). En la evolución libre de fuerzas, este cuerpo mantendrá una rotación uniforme en el plano normal al eje de giro, con velocidad angular constante.

La evolución de un trompo simétrico es un poco más compleja. Como $I_1 = I_2$, los ejes x_1 y x_2 pueden elegirse libremente, normales al eje de simetría x_3 . Nuevamente, sabemos que este cuerpo en movimiento libre de fuerzas mantendrá constante su momento angular; elegimos el eje x_2 normal al vector J e instantáneamente normal a x_3 (que puede ir variando). Como el tensor de inercia no es proporcional a la identidad, no debemos esperar que Ω sea paralela a J; pero sí podemos afirmar que la componente Ω_2 de la velocidad angular según el eje x_2 se anula, ya que deben cumplirse las igualdades (29)

$$J_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_2 = 0 \; .$$

Esto implica que siempre J, Ω y el eje x_3 estarán siempre en el mismo plano (normal a x_2), que va rotando: cada elemento del eje del trompo (x_3) tiene una velocidad $v_i = \Omega \times r_i$ normal al plano del dibujo, es decir el eje gira alrededor del vector J uniformemente, realizando una "precesión regular" como comprobaremos enseguida. Además de esta precesión, está claro que el sólido está girando alrededor de su eje x_3 .

Como se cumple la (29), podemos relacionar la componente de $\Omega\,$ según $x_3\,$ con la magnitud del momento angular

$$\Omega_3 = \frac{J_3}{I_3} = \frac{J\cos\theta}{I_3}$$

Para encontrar la velocidad angular de precesión $\Omega_{\rm pr}$, notamos que $\Omega_1 = \Omega_{\rm pr} \sin \theta$, y recurriendo nuevamente a las relaciones (29),

$$\Omega_1 = \frac{J_1}{I_1} = \frac{J \operatorname{sen} \theta}{I_1} \qquad \Rightarrow \qquad \Omega_{\operatorname{pr}} = \frac{J}{I_1} \,.$$

6.3. Ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido

Cuando se ejercen fuerzas externas sobre un sólido cuya resultante es F, sabíamos que debe cumplirse

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(M\boldsymbol{V}\right)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$$

En nuestro contexto, esto puede deducirse al considerar que tenemos 6 coordenadas generalizadas asociadas a los 6 grados de libertad que mencionamos más arriba, que podemos representar en el vector posición del centro de masa \boldsymbol{R} y 3 ángulos que definen la orientación del sólido, $\boldsymbol{\varphi}$. Las ecuaciones de Lagrange nos permiten relacionar la fuerza resultante sobre el sistema con la evolución de \boldsymbol{R}

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{R}} , \qquad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{V}} = M\boldsymbol{V} = \boldsymbol{P} , \qquad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{R}} = \boldsymbol{F} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{V}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{R}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} .$$

Para analizar la evolución en relación a las rotaciones, referimos todo al centro de masa y recordamos que en nuestra notación $\Omega = \dot{\varphi}$, y que nos restringimos a potenciales conservativos, independientes de las velocidades. Entonces, recordando que el tensor de inercia es simétrico (ejercicio),

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_j} = \frac{\partial T_{\text{rot}}}{\partial \Omega_j} = \frac{\partial}{\partial \Omega_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{\ell,k} I_{\ell k} \Omega_\ell \Omega_k \right) = \sum_k I_{jk} \Omega_k = J_j \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial \Omega} = J$$

Si consideramos una rotación infinitesimal (descripta desde el centro de masa) $\delta \mathbf{r}_i = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_i$, y representamos con \mathbf{f}_i a la fuerza ejercida sobre la masa m_i , debe cumplirse

$$\delta U = -\sum_{i} \boldsymbol{f}_{i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_{i} = -\sum_{i} \boldsymbol{f}_{i} \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} imes \boldsymbol{r}_{i}) = -\delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_{i} (\delta \boldsymbol{r}_{i} imes \boldsymbol{f}_{i}) = -\delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_{i} \boldsymbol{\tau}_{i}^{(e)} = -\boldsymbol{\tau}^{(e)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \; ,$$

donde aparecen los torque externos $\boldsymbol{\tau}_i^{(e)}$ realizados por las fuerzas externas \boldsymbol{f}_i . Vemos entonces que el torque externo resultante $\boldsymbol{\tau}^{(e)}$ se deriva del potencial mediante la relación

$$\mathbf{\tau}^{(\mathrm{e})} = -rac{\partial U}{\partial oldsymbol{arphi}} = rac{\partial L}{\partial oldsymbol{arphi}} \ ,$$

de manera que las ecuaciones de Lagrange asociadas
a φ implican

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\Omega}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}^{(\mathrm{e})} \; ,$$

que reproduce ese añorado resultado que conocíamos del formalismo newtoniano.



6.4. Ángulos de Euler

Para la elección de los 3 ángulos representativos de la orientación instantánea del sólido, imaginamos dos referenciales que comparten el origen de coordenadas: uno fijo al laboratorio (x, y, z), y otro que se orienta con el sistema (x_1, x_2, x_3) , como se ilustra en la figura. Como nuestra idea es inclinar el eje x_3 alrededor del cual el cuerpo gira sobre sí mismo, lo primero que hacemos es rotar un ángulo ϕ alrededor del eje z trasladando provisoriamente el eje x_1 hasta la línea nodal MN. A continuación realizamos un giro de magnitud θ para llevar el eje z a la dirección final del eje x_3 . Finalmente aplicamos una rotación de magnitud ψ alrededor del eje x_3 para obtener la orientación instantánea del sólido.



Evidentemente, en esta construcción los cambios infinitesimales en d φ están dados por la suma de las diferentes contribuciones d ϕ , d θ y d ψ , con el carácter vectorial impuesto por los correspondiente ejes de rotación, como convinimos anteriormente

$$\mathrm{d} arphi = \mathrm{d} \phi + \mathrm{d} heta + \mathrm{d} \psi \qquad \Leftrightarrow \qquad \Omega = \dot{\phi} + \dot{ heta} + \dot{\psi} \; ,$$

es decir, la velocidad angular Ω es el vector resultante de la suma de cada velocidad angular. Para encontrar las componentes de este vector según los ejes x_1 , x_2 y x_3 , comencemos notando que $\dot{\phi}$ está sobre el eje z original, con lo cual

$$\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta \; ,$$

mientras que la proyección de $\dot{\phi}$ sobre el plano $x_1 - x_2$ es $\dot{\phi}$ sen θ , sobre el eje x_2 provisorio (previo a la rotación en ψ), de manera que

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi} \, \sin \theta \, \sin \psi , \qquad \dot{\phi}_2 = \dot{\phi} \, \sin \theta \, \cos \psi .$$

El giro según θ se efectúa al
rededor de la línea nodal, que es normal al eje x_3 , y luego
 se rota según ψ , por lo que

$$\theta_1 = \theta \cos \psi$$
, $\theta_2 = -\theta \sin \psi$, $\theta_3 = 0$.

Finalmente, el giro ψ se realiza alrededor del eje x_3 , y por ende

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0 , \qquad \dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$$

Reuniendo todos estos elementos, podemos escribir las componentes de como

$$\Omega_1 = \dot{\phi} \, \operatorname{sen} \theta \, \operatorname{sen} \psi + \dot{\theta} \, \cos \psi \,, \qquad \Omega_2 = \dot{\phi} \, \operatorname{sen} \theta \, \cos \psi - \dot{\theta} \, \operatorname{sen} \psi \,, \qquad \Omega_3 = \dot{\phi} \, \cos \theta + \dot{\psi} \,. \tag{30}$$

Cuando x_1 , x_2 y x_3 coinciden con los ejes principales de inercia, podemos entonces expresar la energía cinética de rotación de un cuerpo en términos de $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ (y también de ϕ , θ y ψ). Por ejemplo, si retomamos la descripción del trompo simétrico ($I_1 = I_2 \neq I_3$) y sustituimos las componentes (30) de Ω en la expresión (28) obtenemos (ejercicio)

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)^2 \,.$$

También podíamos arribar a esta expresión aprovechando el hecho de que en cualquier trompo simétrico los ejes x_1 y x_2 pueden elegirse arbitrariamente, de modo que podemos tomar *instantáneamente* el eje x_1 en la línea nodal, es decir con $\psi = 0$; en ese caso resulta

$$\Omega_1 = \dot{\theta} , \qquad \Omega_2 = \dot{\phi} \, \operatorname{sen} \theta , \qquad \Omega_3 = \dot{\phi} \, \cos \theta + \dot{\psi} \quad (\text{no cambia})$$

Volviendo al movimiento libre de fuerzas de un trompo simétrico, elegimos el eje z acompañando al vector J, y como es habitual x_3 coincide con el eje del trompo. Eligiendo instantáneamente el eje x_1 en la línea nodal, las componentes de J, según x_1 , x_2 y x_3 serán $(I_1 = I_2)$

$$J_1 = I_1 \Omega_1 = I_1 \dot{\theta}$$
, $J_2 = I_1 \Omega_2 = I_1 \dot{\phi} \sin \theta$, $J_3 = I_3 \Omega_3 = I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})$.

Como $x_1 \perp z$, $\boldsymbol{J} = J \, \hat{\boldsymbol{k}}$ no tiene componente según x_1 , con lo cual

$$J_1 = 0$$
, $J_2 = J \, \operatorname{sen} \theta$, $J_3 = J \, \cos \theta$.

de modo que al comparar con las expresiones anteriores concluimos que

$$\dot{\theta} = 0$$
 ($\theta = \text{cte}$), $I_1 \dot{\phi} = J$ ($\dot{\phi} = \text{cte}$), $I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = J \cos \theta$

La primera condición nos dice que la evolución del trompo se da manteniendo siempre la misma inclinación respecto del vector \boldsymbol{J} . La segunda igualdad nos indica que el eje x_3 gira con velocidad $\dot{\phi} = J/I_1$ alrededor de \boldsymbol{J} , coincidiendo con el resultado que habíamos obtenido anteriormente para $\Omega_{\rm pr}$. Finalmente, como $\Omega_3 = (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})$, la última ecuación nos provee la velocidad de rotación del trompo alrededor de su eje x_3 , $\Omega_3 = (J_3/I_3) \cos \theta$.

Si analizamos un trompo simétrico "pesado", es decir bajo la acción de la gravedad, manteniendo un punto de apoyo fijo, ahora es necesario agregar a la lagrangiana el término correspondiente al potencial gravitatorio

$$-U = -M g \ell \cos \theta$$
,

donde ℓ es la distancia del centro de masa al punto de apoyo fijo. Para describir la evolución de este sistema, puede resultar conveniente pensar en una rotación *pura* alrededor del punto de apoyo, que siempre se mantiene fijo; para ello utilizamos el teorema de Steiner y en lugar de los momentos de inercia baricéntricos I_1 nos desplazamos al centro de giro

$$I_1' = I_1 + M \,\ell^2 \qquad (I_3' = I_3)$$

La energía cinética contenida en la lagrangiana corresponde entonces solamente términos de rotación alrededor de ese punto fijo

$$L = \frac{1}{2} I_1' (\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - M g \ell \cos \theta$$

Notamos que las coordenadas ϕ y ψ son cíclicas, de manera que se conservan sus momentos conjugados

$$p_{\phi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \left(I_1' \, \sin^2 \theta + I_3 \, \cos^2 \theta\right) \dot{\phi} + I_3 \, \dot{\psi} \, \cos \theta = \, \operatorname{cte} = J_z \,, \qquad p_{\psi} = I_3 \left(\dot{\phi} \, \cos \theta + \dot{\psi}\right) = J_3 = \, \operatorname{cte} \,.$$

Como sabemos que también se conserva la energía, podemos expresar en la relación E = T + U las energías cinéticas en términos de J_3 y J_z para eliminar $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$, y reducir el problema a un movimiento en una dimensión, correspondiente a la coordenada θ . Así expresamos (ejercicio)

de modo que podemos definir un potencial efectivo $U_{\rm ef}(\theta)$ para escribir (ejercicio)

$$E = \frac{1}{2} I_1' \dot{\theta}^2 + U_{\rm ef}(\theta) \; .$$

Como siempre, podemos establecer puntos de retorno para θ : habrá un valor mínimo θ_1 y un máximo θ_2 , es decir, el movimiento resultante exhibe una precesión *irregular* dada por la evolución de ϕ , acompañada de una *nutación*, como se denomina el cambio en la inclinación del eje x_3 , contenida en la coordenada θ . En la expresión anterior para $\dot{\phi}$ vemos que dependiendo de la relación entre J_z y J_3 , la evolución de los valores que vaya tomando θ puede originar cambios en el signo de $\dot{\phi}$; queda como ejercicio analizar las diferentes posibilidades, ilustradas en la figura siguiente.



6.5. Ecuaciones de Euler

Cuando un vector cualquiera A no cambia respecto de un sistema que gira con velocidad Ω , desde el referencial del laboratorio vemos que su evolución con el tiempo está dada por

$$rac{\mathrm{d} oldsymbol{A}}{\mathrm{d} t} = oldsymbol{\Omega} imes oldsymbol{A}$$
 .

Cuando además hay variaciones temporales d'A/dt respecto del sistema rotante, desde el laboratorio debemos completar la descripción agregando ese término

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{A} \,. \tag{31}$$

Las ecuaciones de movimiento entonces pueden escribirse conectando el sistema rotante con el del laboratorio

$$rac{\mathrm{d}' oldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} + oldsymbol{\Omega} imes oldsymbol{P} = oldsymbol{F} \;, \qquad \qquad rac{\mathrm{d}' oldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} + oldsymbol{\Omega} imes oldsymbol{J} = oldsymbol{ au} \;.$$

Para descomponer estos vectores según x_1 , x_2 y x_3 , utilizamos la notación

$$\left(\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}\right)_{k} = \frac{\mathrm{d}P_{k}}{\mathrm{d}t}, \qquad \left(\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}\right)_{k} = \frac{\mathrm{d}J_{k}}{\mathrm{d}t}, \qquad \mathrm{etc.},$$

y recordando que P = MV y $J = I\Omega$, arribamos a las ecuaciones de Euler

Como ilustración, recurramos a estas ecuaciones para retomar el caso del trompo simétrico que realiza una rotación libre, donde $\boldsymbol{\tau} = 0$ (además de $\boldsymbol{F} = 0$). La última ecuación de la derecha nos indica que, como $I_1 = I_2$, $\dot{\Omega}_3 = 0$, es decir, Ω_3 debe mantenerse constante. Por otro lado, si reescribimos las primeras en términos de $\omega \equiv (I_3/I_1 - 1)\Omega_3$, obtenemos las ecuaciones equivalentes (ejercicio)

$$\Omega_1 = -\omega \,\Omega_2 \,, \qquad \qquad \Omega_2 = -\omega \,\Omega_1$$

Estas pueden condensarse como (ejercicio)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Omega_1 + i\,\Omega_2) = i\,\omega\,(\Omega_1 + i\,\Omega_2) \qquad \Rightarrow \qquad \Omega_1 + i\,\Omega_2 = A\,e^{i\omega t}$$

donde la constante A puede tomarse real si elegimos adecuadamente las condiciones iniciales para el movimiento; entonces

$$\Omega_1 = A \cos(\omega t)$$
, $\Omega_2 = A \sin(\omega t)$.

Vemos así que la proyección de Ω sobre el plano normal al eje del trompo x_3 rota con velocidad angular ω , con un módulo $A = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$ constante. Como también mostramos que la proyección Ω_3 se mantiene constante, concluimos que el vector Ω gira alrededor de x_3 con velocidad angular ω , manteniendo su magnitud constante, tal como habíamos deducido en §6.2. Por otro lado, como $J_{\ell} = I_{\ell} \Omega_{\ell}$, aunque el vector J no es paralelo a Ω , también gira alrededor de x_3 con velocidad angular ω . Finalmente, queda como ejercicio comprobar que $\omega = -\dot{\psi}$.

6.6. Referenciales no inerciales

Sabemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange son válidas cuando se las plantea desde un referencial inercial K_o , de manera que

$$L_o = \frac{1}{2}m \, \boldsymbol{v}_o^2 - U \qquad \rightarrow \qquad m \, \frac{\mathrm{d} \boldsymbol{v}_o}{\mathrm{d} t} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}$$

Nos interesa ahora dar la descripción desde un sistema no inercial K' que se desplaza respecto de K_o con una velocidad V(t), que no es constante. Sabemos que las velocidades se transformarán de acuerdo a

$$\boldsymbol{v}_o = \boldsymbol{V}(t) + \boldsymbol{v'}$$

donde ingeniosamente llamamos v' a la velocidad respecto del referencial K', para distinguirla de v_o , descripta desde el referencial K_o (*¡cuánta imaginación!*). Sustituyendo en L_o , podemos encontrar la lagrangiana correspondiente al referencial K'

$$L' = rac{1}{2}m\, m{v'}^2 + m\, m{v'} \cdot m{V} + rac{1}{2}m\, m{V}^2 - U \, .$$

Como V^2 es una función de t preestablecida, puede escribirse como la derivada dA/dt de alguna función A(t), de manera que el tercer término de la expresión anterior es irrelevante, por lo que la omitiremos. Por otro lado,

$$m \mathbf{v'} \cdot \mathbf{V} = m \frac{\mathrm{d} (r' \cdot V)}{\mathrm{d}t} - m \mathbf{r'} \cdot \frac{\mathrm{d} \mathbf{V}}{\mathrm{d}t}.$$

Nuevamente, el primer término de la derecha es una derivada total con respecto a t por lo que puede ignorarse. Definiendo $\boldsymbol{W}(t) = \mathrm{d}\boldsymbol{V}/\mathrm{d}t$,

$$L' = \frac{1}{2}m \boldsymbol{v'}^2 - m \boldsymbol{W}(t) \cdot \boldsymbol{r'} - U,$$

de modo que la ecuación de movimiento respecto de este referencial resulta (ejercicio)

$$m \frac{\mathrm{d} \boldsymbol{v'}}{\mathrm{d} t} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r'}} - m \, \boldsymbol{W}(t)$$

donde vemos que aparece una "fuerza inercial" igual a la masa por la aceleración de K' cambiada de signo.

Cuando el referencial K desde donde efectuamos nuestra descripción además de trasladarse con una velocidad V(t) rota con velocidad angular Ω respecto de K', sabemos que la velocidad v' se relaciona con la velocidad vista desde K mediante (31)

$$v' = v + \Omega imes r$$
 .

En cambio, el vector posición r respecto de K (que rota mientras se traslada) coincide con el vector posición r' respecto de K' (que solo se traslada). Sustituyendo, obtenemos la lagrangiana descripta desde el sistema K

$$L = \frac{1}{2}m \boldsymbol{v}^2 + m \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})^2 - m \boldsymbol{W}(t) \cdot \boldsymbol{r} - U.$$

Para encontrar las derivadas parciales de L con respecto a r y a v, es conveniente provocar variaciones infinitesimales dv y dr en la expresión anterior (ejercicio)

$$dL = m \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{v} + m \left(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}\right) \cdot d\boldsymbol{v} + m \left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega}\right) \cdot d\boldsymbol{r} + m \left[\left(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}\right) \times \boldsymbol{\Omega}\right] \cdot d\boldsymbol{r} - m \boldsymbol{W}(t) \cdot d\boldsymbol{r} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot d\boldsymbol{r}$$

lo que implica

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\,\boldsymbol{v} + m\,(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = m\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega} + m\,(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\Omega} - m\,\boldsymbol{W} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \;.$$

La ecuación de movimiento resulta entonces (ejercicio)

$$m \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} - m \boldsymbol{W} + m \left(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}\right) + 2m \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m \boldsymbol{\Omega} \times \left(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\Omega}\right)$$

El tercer miembro de la derecha se agrega a los dos primeros, que ya han sido analizados, y representa los cambios de velocidad cuando la rotación no es uniforme. El cuarto término es la *fuerza de Coriolis*, y a diferencia del anterior, aparece aun cuando Ω se mantenga constante. Finalmente, el término restante corresponde a la *fuerza centrífuga*, y está contenida en mismo plano definido por \mathbf{r} y Ω , siempre normal al eje de rotación.

Cuando W = 0 y Ω es constante, la lagrangiana se reduce a

$$L = \frac{1}{2}m\,\boldsymbol{v}^2 + m\,\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}m\,(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2 - U\;,$$

de manera que (ejercicio)

$$m \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} + 2m\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m\,\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\Omega})$$

En esta descripción desde K, la energía del sistema se obtiene teniendo en cuenta que

$$\boldsymbol{p} = rac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\,\boldsymbol{v} + m\,\boldsymbol{\Omega} imes \boldsymbol{r}$$

con lo cual resulta (ejercicio)

$$E = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} - L = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})^2 + U$$

Vemos entonces que la descripción desde el sistema rotante agrega un término repulsivo, que no es otra cosa que la energía centrífuga que mencionamos en §4.2. Como en este caso tenemos $v_o = v + \Omega \times r$, podemos sustituir v en términos de v_o en la expresión anterior para comparar las diferentes expresiones para la energía, obteniendo (ejercicio)

$$E = E_o - \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}$$
 .

Esta importante relación puede generalizarse para un sistema de partículas, como son los cuerpos rígidos que estudiamos más arriba; es justamente para esos casos que la expresión anterior incluyendo el momento angular cobra mayor sentido que para el caso de una sola partícula.

7. Formulación hamiltoniana

Hasta aquí basamos nuestras descripciones en el formalismo lagrangiano, en la cual partimos tomando como base las coordenadas generalizadas q y las velocidades generalizadas \dot{q} asociadas. Así obtuvimos, para un sistema con n grados de libertad, n ecuaciones diferenciales (en t) de segundo orden. Un posible estado del sistema se representa en un espacio de configuraciones n-dimensional donde se representan todas las q, y a medida que la dinámica evoluciona, ese punto n dimensional se desplaza trazando una curva en ese espacio.

En la descripción hamiltoniana en cambio, construiremos 2n ecuaciones de primer orden en q y $p = \partial L/\partial \dot{q}$, donde estas 2n variables independientes son tenidas en cuenta en igual jerarquía. El estado del sistema es representado en el espacio de fases 2n-dimensional, con el conjunto $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$. En realidad nuestros desarrollos al plantear el principio de Hamilton, consideraban a todas las q y las \dot{q} como variables independientes, ya que de ambas dependía el estado dinámico del sistema descripto; pronto veremos que este paso de un conjunto de variables independientes a otro sin pérdida de información se corresponde con un procedimiento conocido en diferentes ámbitos.

7.1. Función de Hamilton o hamiltoniano

Al momento de formular el principio de Hamilton, escribimos una variación infinitesimal de la lagrangiana debida a variaciones arbitrarias en las q y las \dot{q} como

$$\mathrm{d}L = \sum_{j} \frac{\partial L}{\partial q_{j}} \,\mathrm{d}q_{j} + \sum_{j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{j}} \,\mathrm{d}\dot{q}_{j} \;.$$

Recordando las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

y la definición de los momentos generalizados

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

la expresión anterior se torna

$$dL = \sum_{j} \dot{p}_j \, \mathrm{d}q_j + \sum_{j} p_j \, \mathrm{d}\dot{q}_j = \sum_{j} \dot{p}_j \, \mathrm{d}q_j + \mathrm{d}\left(\sum_{j} p_j \, \dot{q}_j\right) - \sum_{j} \dot{q}_j \, \mathrm{d}p_j \;,$$

o lo que es equivalente,

$$d\left(\sum_{j} p_j \dot{q}_j - L\right) = -\sum_{j} \dot{p}_j \, \mathrm{d}q_j + \sum_{j} \dot{q}_j \, \mathrm{d}p_j \,. \tag{32}$$

El paréntesis de la izquierda se parece mucho a la función energía presentada en §3.6.3, al tiempo que el miembro de la derecha sugiere pensar en una función cuyas variables independientes sean las q y las p. Llamamos entonces al paréntesis de la izquierda función de Hamilton o hamiltoniano

$$H(p,q,t) = \sum_{j} p_j \dot{q}_j - L ,$$

de manera que

$$dH = -\sum_{j} \dot{p}_{j} dq_{j} + \sum_{j} \dot{q}_{j} dp_{j} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{q}_{j} = \frac{\partial H}{\partial p_{j}} \qquad y \qquad \dot{p}_{j} = -\frac{\partial H}{\partial q_{j}} \qquad (33)$$

Estas son las ecuaciones de Hamilton o ecuaciones canónicas, y son equivalentes a las ecuaciones de Legendre, aunque en lugar de n ecuaciones de segundo orden, vale la pena notar que se trata de 2n ecuaciones de primer orden en p y q (2n variables independientes).

Cuando puedan ocurrir cambios de H con t, a partir de las ecuaciones de Hamilton, se cumple

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j} \frac{\partial H}{\partial p_{j}} \dot{p}_{j} + \sum_{j} \frac{\partial H}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} = \frac{\partial H}{\partial t} ,$$

tal como habíamos notado en nuestra pubertad: si H no depende explícitamente de t, es una cantidad conservada. Recordemos que si la energía cinética es cuadrática en las \dot{q} y el potencial no depende de las \dot{q} , entonces H representa la energía del sistema. Del mismo modo, si en la lagrangiana permitimos cambios no solo en las q y las \dot{q} , sino también en t

$$dL = \sum_{j} \frac{\partial L}{\partial q_{j}} dq_{j} + \sum_{j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{j}} d\dot{q}_{j} + \frac{\partial L}{\partial t} dt ,$$

al completar la expresión (32) y comparar con dH, identificamos

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Consideremos el ejemplo de una partícula en un potencial central V(r) y realicemos nuestra descripción en coordenadas esféricas, de modo que partimos de la lagrangiana

$$L = T - V = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, \dot{\phi}^2 \right) - V(r) \, .$$

Explicitamos los momentos generalizados

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$
, $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$, $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\phi}$,

y expresamos las $\{\dot{q}\}$ en términos de las $\{p\}$

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot{\theta} = \frac{p_{\theta}}{m r^2}, \qquad \dot{\phi} = \frac{p_{\phi}}{m r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}, \qquad (34)$$

para sustituir en la definición de H(p,q)

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - L = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \right) + V(r) = T + V = E .$$

Estamos en condiciones de plantear las ecuaciones de Hamilton, que resultan

$$\begin{split} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \;, \qquad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} = \frac{p_{\theta}}{m \, r^2} \;, \qquad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\phi}} = \frac{p_{\phi}}{m \, r^2 \, \mathrm{sen}^2 \theta} \;, \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_{\theta}^2}{m \, r^3} + \frac{p_{\phi}^2}{m \, r^3 \, \mathrm{sen}^2 \theta} - \frac{\partial V}{\partial r} \;, \qquad \dot{p}_{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_{\phi}^2 \cos \theta}{m \, r^2 \, \mathrm{sen}^3 \theta} \;, \qquad \dot{p}_{\phi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \end{split}$$

Las primeras igualdades simplemente reproducen la relación entre las velocidades e impulsos generalizados (34). Se deja como ejercicio verificar que las ecuaciones de Euler-Lagrange son equivalentes a la segunda línea de este conjunto de ecuaciones.

Veamos otro ejemplo, involucrando ahora una partícula de carga eléctrica q bajo la acción de un campo electromagnético. Ya encontramos la lagrangiana para este caso en §3.3.1

$$L = T - U = \frac{m\boldsymbol{v}^2}{2} - q\,\phi + \frac{q}{c}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}$$

de manera que

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m \, \boldsymbol{v} + \frac{q}{c} \boldsymbol{A} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v} = \frac{1}{m} \left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c} \boldsymbol{A} \right) \,.$$

Con estos elementos construimos el hamiltoniano (ejercicio)

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q \phi$$

de donde resultan las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{1}{m} \left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c} \boldsymbol{A} \right) , \qquad \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{q}{mc} \left[\left(\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c} \boldsymbol{A} \right) \cdot \nabla \right) \boldsymbol{A} + \left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c} \boldsymbol{A} \right) \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) \right] - q \nabla \phi .$$

Para llegar a esta última expresión recurrimos a la identidad

$$\nabla(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{f}) = 2(\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{f} + 2\boldsymbol{f} \times (\nabla \times \boldsymbol{f})$$

tomando $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{p} - (q/c)\boldsymbol{A}$ (ejercicio).

Cantidades conservadas

En el primero de los ejemplos anteriores se puso en evidencia que aquí también son relevantes las coordenadas cíclicas: justamente explicitamos en nuestras ecuaciones que $p_j = -\partial H/\partial q_j$, de manera que cuando una coordenada es cíclica (no aparece explícitamente en H), p_j se conserva. Vemos entonces que el análisis respecto de las cantidades conservadas y las coordenadas cíclicas es idéntico al que realizábamos en el formalismo lagrangiano.

7.2. El hamiltoniano y el principio de Hamilton

En §3.2 habíamos definido la acción como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \ L(q, \dot{q}, t) \ .$$

Como ahora introdujimos el hamiltoniano

$$H(p,q,t) = \sum_{j} p_j \, \dot{q}_j - L \; ,$$

podemos enunciar el principio de Hamilton en términos de las variables independientes consideradas (p,q), exigiendo que en torno del extremo de S (la solución para las funciones de movimiento) se cumpla

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_j p_j \, \dot{q}_j - H(p, q, t) \right] = 0 \qquad (\delta q_j(t_1) = 0 = \delta q_j(t_2)) \,. \tag{35}$$

Es decir,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \sum_j \left(p_j \, \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \, \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \, \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \, \delta p_j \right) = 0 \; .$$

Integrando por partes el primer término e imponiendo la condición sobre los extremos de las trayectorias, puede mostrarse que (ejercicio)

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \ p_j \,\delta \dot{q}_j = -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \ \dot{p}_j \,\delta q_j \,,$$

de manera que reemplazando en la expresión anterior y agrupando convenientemente la condición de extremo implica

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \sum_j \left[\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right] = 0 \, .$$

Como esta igualdad debe valer para $\{\delta p_j\}$ y $\{\delta p_j\}$ arbitrarias, y todas ellas son independientes, debe cumplirse

$$\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0$$
 y $\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$ $j = 1, ..., n$

que son justamente las ecuaciones canónicas. Vemos entonces que el principio de Hamilton impone las ecuaciones de movimiento dentro de este contexto, tal como lo hacía en la formulación lagrangiana.

Notemos que, teniendo en cuenta que $\dot{q}_j dt = dq_j$, la condición de extremo (35) puede expresarse como

$$\delta S = \delta \left[\sum_{j} \int_{q_j(t_1)}^{q_j(t_2)} \mathrm{d}q_j \ p_j - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \ H \right] = 0 \ . \tag{36}$$

En algunas situaciones, esta expresión puede resultar muy conveniente.

7.3. Corchetes de Poisson

Para cualquier función f(p,q,t) de los impulsos, coordenadas y el tiempo vale la relación

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k} \left(\frac{\partial f}{\partial q_{k}} \dot{q}_{k} + \frac{\partial f}{\partial p_{k}} \dot{p}_{k} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k} \left(\frac{\partial f}{\partial q_{k}} \frac{\partial H}{\partial p_{k}} - \frac{\partial f}{\partial p_{k}} \frac{\partial H}{\partial q_{k}} \right) ,$$

donde tuvimos presentes las ecuaciones de Hamilton (33). Definiendo el corchete de Poisson para dos funciones cualesquiera $f \ge g$ como[¶]

$$[f,g] = \sum_{k} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) ,$$

la expresión anterior se puede reescribir de manera compacta como

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] \; .$$

Aquí se pone en evidencia que si f no depende explícitamente de t, esta es una integral de movimiento si se cumple [f, H] = 0.

Notemos que a partir de la definición de los corchetes de Poisson, se cumplen las siguientes propiedades (janímate y demuéstralas!)

 $[\]P$ Conviene enfatizar que empleamos el signo opuesto al utilizado en el texto de Landau.

$$[f,g] = -[g,f] \qquad (antisimetría);$$

$$[af + bg,h] = a[f,h] + b[g,h], \quad [h,af + bg] = a[h,f] + b[h,g], \quad a,b \in \mathbb{R} \qquad (bilinealidad)$$

$$(\hookrightarrow \text{ si } c = \text{constante}, [f,c] = 0);$$

$$[fg,h] = [f,h]g + f[g,h] \quad \text{(Leibniz)};$$

$$\frac{\partial [f,g]}{\partial t} = \left[\frac{\partial f}{\partial t},g\right] + \left[f,\frac{\partial g}{\partial t}\right];$$

$$[f,p_k] = \frac{\partial f}{\partial q_k}, \quad [f,q_k] = -\frac{\partial f}{\partial p_k};$$

$$[q_j,q_k] = 0, \quad [p_j,p_k] = 0, \quad [q_j,p_k] = \delta_{j,k}.$$

Además separamos de este conjunto la identidad de Jacobi

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0, \qquad (37)$$

cuya demostración es bastante trabajosa y aquí la omitiremos.

7.3.1. Teorema de Poisson

Si $f \ge g$ son integrales de movimiento, entonces [f, g] también lo es.

Este teorema se prueba fácilmente recurriendo a la identidad de Jacobi. Consideremos primero el caso en que $f \ge g$ no dependen explícitamente de t: tomando h = H en (37) tenemos

$$[f, [g, H]] + [g, [H, f]] + [H, [f, g]] = 0,$$

donde los dos primeros términos se anulan, ya que al conservarse f y g se cumple [g, H] = 0 = [H, f]; la identidad anterior implica entonces que

$$[H,[f,g]]=0,$$

de manera que [f, g] se mantiene constante. \Box

Veamos ahora qué ocurre cuando $f \ge g$ son integrales de movimiento, pero dependen explícitamente de t. En este caso podemos escribir (ejercicio)

$$\frac{\mathrm{d}\left[f,g\right]}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\left[f,g\right]}{\partial t} + \left[\left[f,g\right],H\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial t},g\right] + \left[f,\frac{\partial g}{\partial t}\right] + \left[f,\left[g,H\right]\right] + \left[g,\left[H,f\right]\right],$$

donde utilizamos la *antisimetría* de los corchetes de Poisson y luego la identidad de Jacobi para reemplazar los dos últimos términos. Si ahora volvemos a utilizar la antisimetría, y a continuación la *bilinealidad*, resulta (ejercicio)

$$\frac{\mathrm{d}\left[f,g\right]}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\partial f}{\partial t},g\right] + \left[f,\frac{\partial g}{\partial t}\right] + \left[\left[f,H\right],g\right] + \left[f,\left[g,H\right]\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \left[f,H\right],g\right] + \left[f,\frac{\partial g}{\partial t} + \left[g,H\right]\right] = \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},g\right] + \left[f,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right]$$

Como por hipótesis df/dt = 0 y dg/dt = 0, vemos que [f,g] es una integral de movimiento, incluso cuando f y g dependan explícitamente de t. \Box

Vale la pena notar que en un sistema dado el número de constantes de movimiento es limitado, por lo que la aplicación excesiva del teorema de Poisson no siempre proporcionará información novedosa.

7.4. Transformaciones canónicas

La elección de las coordenadas generalizadas no es única: ya sabemos que siempre podemos elegir un nuevo conjunto de coordenadas $Q_j(q,t)$, a través de lo que habíamos denominado transformaciones puntuales. En el marco del formalismo lagrangiano habíamos visto que cualquier transformación puntual mantiene las ecuaciones de Euler-Lagrange (ver §2.5). Obviamente, esa libertad se hereda en el formalismo hamiltoniano, aunque cabe preguntarse si tendremos mayor libertad para elegir otras transformaciones que mantengan invariantes las ecuaciones de Hamilton. Como ahora las p y las q tienen la misma jerarquía, queremos ver transformaciones del tipo[|]

$$Q_j = Q_j(p,q,t)$$
 y $P_j = P_j(p,q,t)$

Aquí están incluidas las transformaciones puntuales, donde no intervenían los impulsos generalizados.

que conserven la forma de las ecuaciones canónicas, es decir,

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j}$$
 y $\dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j}$

donde el nuevo hamiltoniano H' está expresado en términos de las $P \ge Q$. Sabemos que en esta representación debe satisfacerse el principio de Hamilton, es decir, así como se cumple

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \ L(q, \dot{q}, t) = 0$$

debe también cumplirse

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; L'(Q, \dot{Q}, t) = 0 \; ,$$

y por lo tanto,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; (L - L') = 0 \; .$$

Para que esta última expresión se anule no es necesario que se cumpla L = L': es suficiente que estas lagrangianas difieran en una derivada total respecto del tiempo

$$L - L' = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \; ,$$

ya que, al estar prefijados los estados en t_1 y t_2 , siempre valdrá

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \delta \left(F\big|_{t_2} - F\big|_{t_1} \right) = 0 \; .$$

Esta función F es partícipe de la relación entre las variables iniciales (p,q) y las nuevas variables (P,Q). La forma más general podría ser F = F(q, p, Q, P, t), pero sabemos que además del tiempo solo hay 2n variables independientes, es decir 2n + 1 en total; entre todas las posibilidades, elijamos en primera instancia F(q, Q, t). En este caso,

$$L - L' = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \qquad \leftrightarrow \qquad \left(\sum_{j} p_{j} \dot{q}_{j} - H\right) - \left(\sum_{j} P_{j} \dot{Q}_{j} - H'\right) = \sum_{j} \frac{\partial F}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} + \sum_{j} \frac{\partial F}{\partial Q_{j}} \dot{Q}_{j} + \frac{\partial F}{\partial t} ,$$

de donde podemos expresar un cambio infinitesimal dF asociado a un intervalo dt mediante

$$dF = \sum_{j} \frac{\partial F}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j} \frac{\partial F}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial F}{\partial t} dt = \sum_{j} p_j dq_j - \sum_{j} P_j dQ_j + (H' - H) dt.$$
(38)

Como elegimos las q y las Q como variables independientes, identificamos así

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j}$$
, $P_j = -\frac{\partial F}{\partial Q_j}$, $H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$.

Entonces toda la información sobre la transformación $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ y $H \rightarrow H'$ está contenida en F, que recibe el nombre de función generatriz.

Cuando nos interesen otras elecciones para el conjunto de variables independientes —en lugar de q, Q y t—, recurrimos a las transformadas de Legendre, de las cuales aquí presentaremos solamente la siguiente "receta": dadas m variables independientes $X_1, X_2, ..., X_m$ y una función

$$f = f(X_1, ..., X_k, X_m)$$

que contiene toda la información de interés, entonces la función

$$\psi_k(X_1, ..., Y_k, X_m) = f - Y_k X_k$$
, con $Y_k \equiv \frac{\partial f}{\partial X_k}$

también contiene toda la información de interés sobre nuestro sistema. Volviendo a nuestra descripción, supongamos por ejemplo que elegimos (q, P, t) como variables independientes, en lugar de (q, Q, t), y tenemos la F(q, Q, t) obtenida arriba: queremos transformar todas las Q_j por las P_j , que en este caso cumplen

$$-P_j = \frac{\partial F}{\partial Q_j}$$

Entonces, siguiendo la receta de arriba, la función

$$\Phi(q, P, t) = F - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial Q_j} Q_j = F + \sum_{j=1}^{n} P_j Q_j$$
(39)

es otra función generatriz para la transformación $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ y $H \rightarrow H'$. Podemos constatar cómo se provee toda la información, explicitando d Φ y teniendo en cuenta (38)

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}\left(F + \sum_{j=1}^{n} P_j Q_j\right) = \sum_j p_j \,\mathrm{d}q_j + 0 + \sum_j Q_j \,\mathrm{d}P_j + (H' - H) \,\mathrm{d}t$$

de donde

$$p_j = \frac{\partial \Phi}{\partial q_j}$$
, $Q_j = + \frac{\partial \Phi}{\partial P_j}$, $H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$

Consideremos ahora el ejemplo de la función generatriz

$$F(q,Q) = \sum_{j=1}^{n} q_j Q_j ,$$

que permite obtener

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j} = Q_j , \qquad y \qquad P_j = -\frac{\partial F}{\partial Q_j} = -q_j$$

Vemos que esta transformación asume los impulsos originales p como las nuevas coordenadas Q y las coordenadas das originales cambiadas de signo -q como los nuevos impulsos P, poniendo en evidencia que estas magnitudes tienen la misma relevancia dentro del formalismo hamiltoniano.

Analicemos otro ejemplo, que involucra un oscilador armónico unidimensional, para el cual

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

Las ecuaciones de Hamilton nos llevan a la conocida identidad (ejercicio) $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$. Sería muy conveniente encontrar una transformación canónica que nos permita expresar un nuevo hamiltoniano simplificado como

$$H'(P) = \omega P$$

Analizando la forma de H, resulta evidente que la transformación

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \, \mathrm{sen} \, Q \; , \qquad \qquad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q$$

consigue ese hamiltoniano; queda como ejercicio verificar que existe una función generatriz para esta transformación, lo que garantiza que efectivamente esta es una transformación canónica.

En el marco del formalismo hamiltoniano entonces, las transformaciones que nos interesan son aquellas que conservan la forma de las ecuaciones de Hamilton, y son las llamadas transformaciones canónicas. Los impulsos y coordenadas abarcados en estas transformaciones se denominan magnitudes canónicamente conjugadas. Ya vimos que al encontrar una función generatriz garantizamos que una transformación resulta canónica. A continuación aprovecharemos los corchetes de Poisson para agregar herramientas en esta misma dirección.

Teorema : [f, g] es invariante ante transformaciones canónicas.

Puede demostrarse este teorema escribiendo todas las derivadas involucradas en la definición de los corchetes de Poisson, aunque eso resulta demasiado engorroso. Para no distraer la atención del aplicado lector, tratemos de convencernos de que $[f,g]_{P,Q} = [f,g]_{p,q}$ imaginando un sistema representado por $H = f^{**}$. Pensamos esto para un t fijo, ya que t no está entre las variables que se transforman; esto es equivalente a considerar que g no depende explícitamente de t: en ese caso

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial g}{\partial t} + [g, H]_{p,q} \,.$$

^{**}No siempre puede resultar razonable esta hipótesis.

Evidentemente, esta derivada no puede depender de nuestra elección de (p,q) o (P,Q) para evaluarla. \Box

Este teorema nos provee un método para verificar si una dada transformación es canónica, ya que teniendo presente que

 $[q_j, q_k]_{p,q} = 0$, $[p_j, p_k]_{p,q} = 0$, $[q_j, p_k]_{p,q} = \delta_{j,k}$,

debe cumplirse

 $[q_j, q_k]_{P,Q} = 0$, $[p_j, p_k]_{P,Q} = 0$, $[q_j, p_k]_{P,Q} = \delta_{j,k}$,

o equivalentemente

 $[Q_j, Q_k]_{p,q} = 0$, $[P_j, P_k]_{p,q} = 0$, $[Q_j, P_k]_{p,q} = \delta_{j,k}$.

Si bien aquí no entramos en detalle respecto de la demostración de esta propiedad, es importante señalar que estas condiciones resultan suficientes para garantizar que la transformación es canónica.

7.5. El método de Hamilton-Jacobi

Al formular el principio de Hamilton, siempre consideramos que las condiciones en los extremos de la acción (8) correspondían a instantes t_1 y t_2 preestablecidos. Ahora que sabemos que se cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange, podemos dejar libre la restricción en t_2 , es decir $q(t_2)$ no está fijado de antemano, aunque sabemos que la acción se minimiza para las diferentes soluciones asociadas a esas condiciones. En ese caso, las $\delta q(t)$ desembocan en diferentes $q(t_2)$, de manera que la condición (9) resulta

$$\delta S = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{j}} \, \delta q_{j} \right)_{t_{1}}^{t_{2}} + \int_{t_{1}}^{t_{2}} \mathrm{d}t \, \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_{j}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \right] \delta q_{j} \,,$$

siempre manteniendo la condición $\delta q(t_1) = 0$. Sabemos que el segundo término de la derecha se anula, ya que se respetan las ecuaciones de movimiento, de modo que solo sobrevive el primer término evaluado en el extremo superior

$$\delta S = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \, \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} p_j \, \delta q_j \qquad (\text{simplificanos notación: } \delta q_j(t_2) = \delta q_j) \,,$$

es decir,

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j \; .$$

Si en cambio pensamos que lo que está libre es $t = t_2$, de la definición de la integral de accción tenemos que

$$S = \int_{t_1}^t \mathrm{d}t' \ L \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = L \ .$$

Entonces, al considerar que la acción puede depender tanto de $q(=q(t_2))$ como de $t(=t_2)$,

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j ,$$

o bien

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_{j=1}^{n} p_j \, \dot{q}_j = -H \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0 \; .$$

La estrategia de explicitar que tomamos como variables propias de S a las coordenadas y el tiempo, nos permite llegar a la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\bigg(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\bigg) = 0 \; .$$

Esta es una ecuación no lineal (originalmente era cuadrática en los p) en derivadas parciales: su solución provee las ecuaciones de movimiento, ya que nuestro desarrollo nos llevó a formas alternativas del principio de Hamilton. En la resolución de la ecuación de Hamilton-Jacobi surgirán (n + 1) constantes de integración: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ al integrar q_1, \ldots, q_n más una constante aditiva global A asociada a la integración en t (lineal). Separando esa constante A podemos escribir

$$S = f(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t) + A ,$$

vemos que si pudiéramos llevar $(p,q) \rightarrow (\alpha,\beta)$ a través de la función generatriz $\Phi(q,\alpha,t) \equiv f(q,\alpha,t)$, donde α y β juegan respectivamente los roles de impulsos y coordenadas nuevos, se cumpliría

$$p_j = \frac{\partial \Phi}{\partial q_j}$$
, $\beta_j = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_j}$, $H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$.

Pero notemos que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} = -H \qquad \Rightarrow \qquad H' = \frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

;Qué información útil podría prove
ernos un hamiltoniano H' idénticamente nulo? Aparentemente ninguna, a
unque las ecuaciones de Hamilton en esta nueva representación resultan

$$\dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j} \longrightarrow \dot{\alpha}_j = -\frac{\partial H'}{\partial \beta_j} = 0 \implies \alpha_j = \text{constante} ,$$

 $\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j} \longrightarrow \dot{\beta}_j = -\frac{\partial H'}{\partial \alpha_j} = 0 \implies \beta_j = \text{constante} .$

En realidad la información valiosa no está precisamente en H' sino en la transformación canónica involucrada, ya que las ecuaciones

$$\frac{\partial \Phi(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_j} = \beta_j \tag{40}$$

permiten despejar las soluciones $q_k(t, \alpha, \beta)$ para nuestro problema.

El método de Hamilton-Jacobi consiste entonces en construir el Hamiltoniano H, explicitar las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, y luego encontrar una solución $S = f(q_1, ..., q_n; \alpha_1, ..., \alpha_n; t) + A$, para construir el sistema de ecuaciones (40); de allí obtenemos las $q_k(t, \alpha, \beta)$ que resuelven nuestro problema (también podemos expresar $p_j = \partial S/\partial q_j$).

En algunos casos donde las cuentas pueden complicarse, conviene probar con alguna constante α conocida previamente, de modo que $\partial S/\partial \alpha =$ cte. permite establecer una relación particular entre las q y t, reduciendo la dimensionalidad del problema.

En los casos en que H no depende explícitamente del tiempo, es decir para sistemas conservativos, se cumplirá

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E \;(= {\rm cte}) \qquad \Rightarrow \qquad S = S_o(q) - E \, t \;,$$

lo que equivale a reescribir la ecuación de Hamilton-Jacobi como

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S_o}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_o}{\partial q_n}\right) = E$$

Veamos en este contexto el ejemplo de un oscilador armónico unidimensional

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$
,

recordando que $p = \partial S / \partial q$. La ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2 = 0$$

sugiere proponer, en consonancia con el desarrollo previo,

$$S = S_1(t) + S_2(q) \; .$$

Denotando $\dot{S}_1 = \partial S / \partial t$ y $S'_2 = \partial S / \partial q$, reescribimos la expresión anterior

$$-\dot{S}_1(t) = \frac{1}{2m} \left[S'_2(q) \right]^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = \alpha \qquad (\text{constante de separación}) \,.$$

Justamente, arriba señalamos que la derivada temporal de S en un sistema conservativo es una constante (E). De la expresión anterior podemos despejar e integrar por separado en t y en q (ejercicio)

$$S'_2(q) = \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2} \qquad \Rightarrow \qquad S = S_1(t) + S_2(q) = m\omega \int \mathrm{d}q \,\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2} - \alpha t \,.$$

Entonces encontramos β (que juega el rol de una nueva coordenada Q)

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{1}{\omega} \int \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2}} - t \qquad \Rightarrow \qquad q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \phi_o) \qquad (\phi_o \equiv \beta \omega) \; .$$

Arribamos así a la expresión familiar para la función de movimiento; sustituyendo la constante $\alpha = E$, vemos que las soluciones coinciden con las encontradas en otros momentos vitales de nuestra juventud.

Consideremos a continuación otro ejemplo, que involucra el campo central V(r) = -K/r. Recordando que el movimiento se desarrolla en un plano, escogemos las coordenadas polares r, ϕ y escribimos el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) - \frac{K}{r} \; .$$

Notando que la coordenada ϕ es cíclica, vemos que p_{ϕ} es una cantidad conservada (ya sabemos que es la proyección J_z del momento angular, y que es el módulo de J, normal al plano del movimiento). Teniendo presente que

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$$
 $p_r = \frac{\partial S}{\partial r}$ $p_\phi = \frac{\partial S}{\partial \phi} = \alpha_2$ (constante),

estamos en condiciones de escribir la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \right] - \frac{K}{r} = 0 \; .$$

De forma análoga al ejemplo previo, proponemos $S = S_1(r) + S_2(\phi) + S_3(t)$ y sustituimos en la expresión anterior

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\mathrm{d}S_1(r)}{\mathrm{d}r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\mathrm{d}S_2(\phi)}{\mathrm{d}\phi} \right)^2 \right] - \frac{K}{r} = -\dot{S}_3(t) = \alpha_3 \quad \text{(constante)} \;.$$

Podemos afirmar que α_3 es una constante porque el miembro de la izquierda no depende de t, mientras que $-\dot{S}_3(t)$ solamente depende de t. Continuando con la receta del método de Hamilton-Jacobi,

$$(Q_j =) \beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}$$
, y notando que $\frac{\partial S}{\partial \phi} = \frac{dS_2}{d\phi} = \alpha_2$ (cte.),

reemplazamos en la expresión anterior y despejamos (ejercicio)

$$\frac{\mathrm{d}S_1(r)}{\mathrm{d}r} = \sqrt{2m\alpha_3 + \frac{2mK}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} \; .$$

Reuniendo toda esta información,

$$S = \left[\int \mathrm{d}r \, \sqrt{2m\alpha_3 + \frac{2mK}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}} \, \right] + \alpha_2^2 \phi - \alpha_3 t \; .$$

Con esta expresión, estamos en condiciones de explicitar las derivadas $\partial S/\partial \alpha_j = \beta_j$ para obtener una relación entre las coordenadas y encontrar, por ejemplo, ecuaciones para las trayectorias. Si nos convencemos (ejercicio) de que $\alpha_3 = -E$ y $\alpha_2 = J$, al reemplazar en las expresiones correspondientes, las trayectorias tomarán la forma de las que encontramos en §4.3.