

Mecánica

Guía 2: Principio de d'Alembert, cálculo variacional y función de Lagrange - 22 de agosto de 2023

Problema 1: Utilizando el principio de los trabajos virtuales:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (1)$$

donde la suma se extiende a las N partículas del sistema, halle las condiciones de equilibrio para:

- a) un péndulo simple ideal de longitud ℓ y masa m ;
- b) una palanca (de primer género) de brazos ℓ_1 y ℓ_2 y masas m_1 y m_2 ;
- c) una máquina de Atwood con masas m_1 y m_2 en sus extremos;
- d) ídem, con m_1 que cuelga libremente y m_2 que desliza sin fricción sobre un plano inclinado de ángulo α .
- e) un péndulo doble ideal de longitudes ℓ_1 y ℓ_2 y masas m_1 y m_2 .

Ayuda: proceda de la siguiente forma: i) Determine la cantidad s de grados de libertad y las coordenadas $q^1, \dots, q^s$ que planea usar para describir la configuración del sistema. ii) Elija y dibuje el sistema de coordenadas cartesianas inerciales (SCCI) desde donde planea describir el sistema. iii) Utilizando el SCCI elegido, escriba los vectores posición $\mathbf{r}_1(q), \mathbf{r}_2(q)$, etc., de las distintas partículas que componen el sistema *en términos de las coordenadas generalizadas*. iv) Note que en el método de trabajos virtuales el significado del símbolo $\delta \mathbf{r}_i$ es

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j \quad (2)$$

y que al pedir que (1) valga para δq^j arbitrarios resultan las ecuaciones de equilibrio.

→ A partir del problema siguiente usaremos la convención de Einstein (suma sobre índices repetidos)

Problema 2: Utilizando el principio de d'Alembert,

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (3)$$

para desplazamientos virtuales arbitrarios $\delta \mathbf{r}_i$ (esto es, de la forma (2) con los δq^j arbitrarios), halle las ecuaciones de movimiento de los sistemas del Problema 1.

Ayuda: para calcular $\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$ note que

$$\mathbf{v}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \dot{q}^j$$

(esto es, hay que reemplazar δq^j por $\dot{q}^j$ en la cuenta que ya hizo en (2)). Utilice esto para calcular $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ y luego $\dot{\mathbf{p}}_i$. Note que al derivar el vector velocidad respecto del tiempo obtendrá un término lineal en las $\ddot{q}^j$ y otro cuadrático en las $\dot{q}^j$:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \ddot{q}^j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j \partial q^k} \dot{q}^j \dot{q}^k$$

Problema 3: Escriba la lagrangiana y las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Euler-Lagrange) para los sistemas del Problema 2, y compárelas con las que obtuvo allí. Note que en el P1 obtuvo $\mathbf{r}_i(q)$, lo que le permite calcular $U(q)$, y en el P2 obtuvo $\mathbf{v}_i(q, \dot{q})$, lo que le permite calcular $T(q, \dot{q})$.

Problema 4: Calcule la lagrangiana de una partícula libre en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Problema 5: Una partícula realiza un movimiento unidimensional en un campo conservativo

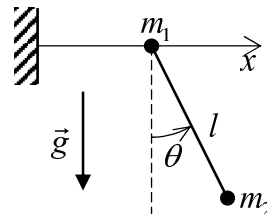
$$m \ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx}.$$

Considere la transformación de coordenadas $x = x(q, t)$. Demuestre que la coordenada generalizada q satisface la ecuación de Euler-Lagrange

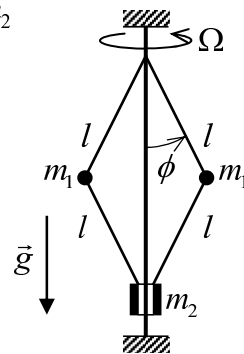
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

donde la función L se construye a partir de la energía cinética T y la energía potencial U como $L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$.

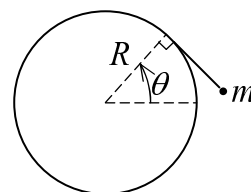
Problema 6: Escriba la lagrangiana para un péndulo simple de masa m_2 y largo l cuyo punto de suspensión es la masa m_1 , la cual puede deslizarse libremente sobre una recta horizontal fija que se encuentra en el mismo plano vertical.



Problema 7: Escriba la lagrangiana para el regulador centrífugo que se muestra en la figura. El sistema consta de varillas rígidas sin masa unidas por articulaciones sin fricción. La articulación superior está a una altura fija y m_2 puede desplazarse sin fricción sobre el eje vertical. Todo el sistema gira con velocidad angular constante Ω alrededor del eje vertical.



Problema 8: Una masa puntual m exenta de fuerzas externas se encuentra unida por una cuerda inextensible de masa despreciable a un cilindro fijo de radio R , y restringida a moverse en el plano de la figura. Inicialmente la cuerda está totalmente enrollada de modo que la masa toca el cilindro, y se le da a la masa un impulso radial, con lo que la cuerda empieza a desenrollarse, *manteniéndose siempre tensa*.



- ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?
- Escriba la lagrangiana y las correspondientes ecuaciones de movimiento.
- Resuelva las ecuaciones de movimiento utilizando la condición inicial planteada.

Problema 9: El *Principio de Fermat* establece que entre dos puntos dados, la trayectoria seguida por un rayo de luz es tal que el tiempo empleado en recorrerla es mínimo. En base a ello:

- demuestre que en un medio con índice de refracción constante, la trayectoria de un rayo de luz es recta.
- demuestre que para un rayo de luz que pasa por dos puntos que se encuentran en medios contiguos de índices de refracción n_1 y n_2 , respectivamente, y separados por una interfase plana, se cumple la ley de Snell;
- determine la ecuación para la trayectoria de un rayo de luz en el plano (y, z) suponiendo que el índice de refracción cambia con la “altura” z , es decir $n = n(z)$.

Problema 10: Dada una curva plana $y(x)$ podemos generar una superficie de revolución, haciendo girar la curva alrededor del eje y . Obtenga la curva que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , con $x_1 < x_2$, que genera la superficie de área mínima. Verifique que dicha curva es una catenaria.

Problema 11: Un niño muy pequeño de masa m se deja caer por un tobogán cuya forma viene dada por la curva $y(x)$, bajo la acción de la fuerza de gravedad $\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$ (se supone despreciable el rozamiento). El tobogán tiene sus puntos extremos en (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , con $x_1 < x_2$ e $y_1 > y_2$.

- Determine la expresión para el tiempo que tarda el niño en recorrer el tobogán.
- Mediante una formulación variacional, calcule la forma del tobogán $y(x)$ que minimiza el tiempo de descenso (esta curva, denominada *braquistócrona*, es una cicloide).
- Para una dada cicloide, demuestre que el tiempo empleado en descender hasta el punto más bajo es independiente del punto de partida (en reposo). Note que este hecho permite la construcción de un péndulo rigurosamente isócrono.

Problema 12: Considere una soga inextensible e infinitamente flexible, de densidad (lineal) uniforme ρ , que tiene sus extremos fijos en los puntos $(-x_o, y_o)$ y (x_o, y_o) . La soga se halla en un campo gravitatorio uniforme de aceleración $-g\mathbf{j}$, y en reposo adoptará la forma que minimice su energía potencial $V = \int \rho g y ds$, sujeta a la restricción de que el largo $\ell = \int ds$ de la soga es constante; aquí ds es el diferencial de longitud a lo largo de la soga y las integrales son a lo largo de toda la soga. Muestre que la forma de la soga en reposo es una *catenaria*, es decir que $y(x) = a \cosh(bx) + c$, y determine las constantes a , b y c .

Problema 13: Calcule la acción para $0 \leq t \leq T$ para una caída libre vertical que satisfaga $z(0) = h$ y $z(T) = 0$, proponiendo una función de movimiento $z(t) = at^3 + bt^2 + ct + h$ (re-escriba c en términos de a y

b usando $z(T) = 0$). Pruebe que para a y b que minimizan la acción resulta

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \left(\frac{g}{2}T - \frac{h}{T}\right)t + h.$$

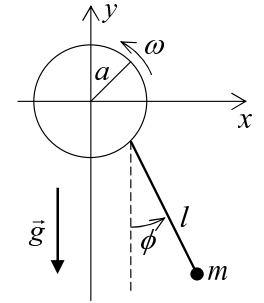
Problema 14: Considere dos lagrangianas $L_1(q, \dot{q}, t)$ y $L_2(q, \dot{q}, t)$ que difieren entre sí solamente en la derivada total respecto del tiempo de una función $f(q, t)$ de las coordenadas y el tiempo,

$$L_2(q, \dot{q}, t) = L_1(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}f(q, t).$$

Demuestre que ambas lagrangianas generan las mismas ecuaciones de movimiento.

Problema 15: Escriba la lagrangiana y las correspondientes ecuaciones de movimiento para un péndulo plano cuyo punto de suspensión:

- a) se desplace con velocidad angular constante ω sobre una circunferencia vertical de radio a (ver figura);
- b) se mueve sobre el eje x según $x(t) = a \cos(\omega t)$;
- c) se mueve sobre el eje y según $y(t) = a \sin(\omega t)$.



Mediante la adición de la derivada total respecto del tiempo de una adecuada función de la coordenada y el tiempo, simplifique en cada uno de los casos anteriores la expresión de la lagrangiana. Compruebe que las ecuaciones de movimiento no se modifican.