Mecánica

Guía 3: Vínculos, cantidades conservadas, movimiento unidimensional - 31 de agosto de 2023

Problema 1: Sea $q_1, \ldots, q_n$ un conjunto de coordenadas generalizadas independientes para un sistema de n grados de libertad, cuya lagrangiana es $L(q, \dot{q}, t)$. Suponga que se realiza una transformación a otro conjunto de coordenadas independientes $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$ a través de ecuaciones de la forma

$$q_i = q_i(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n, t), \quad i = 1, \ldots, n \, .$$

Tal transformación se conoce como *transformación puntual.* Muestre que la forma de las ecuaciones de Euler–Lagrange es *invariante* ante transformaciones puntuales, si definimos

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t) = L\big(q(\tilde{q}, t), \dot{q}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t), t\big) \, .$$

(Ayuda: es más sencillo hacerlo a través del principio de Hamilton.)

Problema 2: Obtenga las ecuaciones de movimiento para una partícula en un campo gravitatorio uniforme, la cual se desplaza sin roce sobre

a) una parábola fija que se encuentra en un plano vertical;

b) una circunferencia fija que se halla en un plano vertical;

c) una recta que gira con velocidad angular constante en un plano vertical;

d) un plano inclinado que se mueve en la dirección vertical según una función conocida del tiempo.

Mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, obtenga expresiones para las fuerzas de ligadura.

Problema 3: Calcule la componente cartesiana J_z y el módulo J del momento angular de una partícula, en términos de sus coordenadas cartesianas (x, y, z), cilíndricas (ρ, ϕ, z) y esféricas (ρ, θ, ϕ) y dé

a) las correspondientes velocidades generalizadas;

b) los correspondientes momentos generalizados.

Problema 4: Calcule las cantidades conservadas en el movimiento de una partícula en un campo uniforme $U(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{x}$.

Problema 5: Determine qué componentes de los momentos lineal y angular se conservan en el movimiento dentro de los siguientes campos gravitatorios:

a) campo cuya fuente es un plano homogéneo infinito;

b) campo cuya fuente es un cilindro homogéneo infinito;

c) campo cuya fuente es un prisma homogéneo infinito;

d) campo cuya fuente son dos masas puntuales;

e) campo cuya fuente es un semiplano homogéneo infinito;

f) campo cuya fuente es un cono homogéneo infinito;

g) campo cuya fuente es un toro circular homogéneo;

h) campo cuya fuente es una hélice cilíndrica homogénea infinita.

Problema 6: Considere una partícula que puede moverse libremente sobre la superficie de:

a) una esfera, **b)** un cilindro, **c)** un cono.

En cada caso, determine las cantidades conservadas y las propiedades geométricas de las trayectorias.

Problema 7: Utilice el teorema de Noether para los casos de:

a) invariancia ante traslaciones *rígidas* (se debe conservar el impulso lineal total);

b) invariancia ante rotaciones *rígidas* (se debe conservar el momento angular total).

Problema 8: Determine el movimiento de una partícula de masa m en

a) el potencial de Morse $U(x) = A\left(e^{-2ax} - 2\,e^{-ax}\right)$, $A > 0$, $a > 0$;

b) el potencial $U(x) = -A\,x^4$, $A > 0$, con energía $E = 0$.

Problema 9: Halle una expresión para el período de oscilación entre dos puntos de retorno en un potencial $U(x)$, en función de la energía E.

Problema 10: Mediante un desarrollo en serie de Taylor del potencial $U(x)$ alrededor del punto $x = a$, determine aproximadamente la función de movimiento $x(t)$ de una partícula para $x \simeq a$,

a) cuando $x = a$ es un punto de retorno, es decir $E = U(a)$, con $U'(a) \neq 0$;

b) cuando $x = a$ es un punto de retorno con $U'(a) = 0$ y $U''(a) < 0$;

c) cuando $x = a$ es un máximo cuadrático de U y $E \lesssim U(a) \quad (E \to U(a)^-)$;

d) cuando $x = a$ es un máximo cuadrático de U y $E \gtrsim U(a) \quad (E \to U(a)^+)$.

Compare los resultados del punto **a)** con el movimiento cerca de la máxima altura en un tiro vertical, y los de los puntos **b) - d)** con el movimiento de un péndulo simple cerca de su posición de equilibrio inestable.

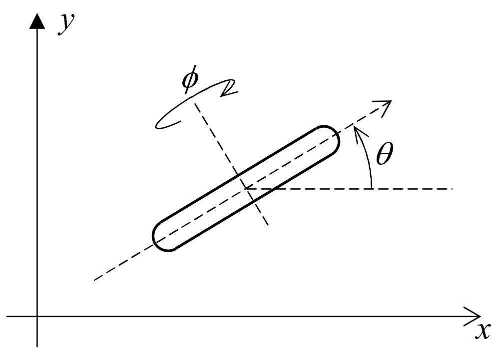
Problemas suplementarios

Problema 11: Determine la ley de transformación de la energía y de los momentos generalizados bajo la transformación puntual del problema **1**. Como caso particular, considere el paso a un sistema de referencia que gira alrededor del eje z con velocidad angular Ω constante,

a) en coordenadas cilíndricas: $\rho = \rho'$, $\phi = \phi' + \Omega t$, $z = z'$;

b) en coordenadas cartesianas: $x = x' \cos\Omega t - y' \operatorname{sen}\Omega t$, $y = x' \operatorname{sen}\Omega t + y' \cos\Omega t$, $z = z'$.

Problema 12: Un *uniciclo* consta de una rueda de radio a cuyo eje se mantiene horizontal mientras gira (ángulo ϕ) alrededor del mismo, rodando sin deslizar sobre el plano horizontal x, y mientras su dirección de avance forma un ángulo θ con el eje x. Los vínculos impuestos pueden expresarse mediante las ecuaciones



$$\mathrm{d}x = \cos\theta\, a\, \mathrm{d}\phi, \qquad \mathrm{d}y = \operatorname{sen}\theta\, a\, \mathrm{d}\phi,$$

o alternativamente

$$\cos\theta\ \mathrm{d}x + \operatorname{sen}\theta\ \mathrm{d}y - a\,\mathrm{d}\phi = 0\ , \quad \operatorname{sen}\theta\ \mathrm{d}x - \cos\theta\ \mathrm{d}y = 0\ .$$

Muestre que estos vínculos son *no holónomos*, es decir que no existe ningún factor integrante que convierta las ecuaciones de vínculo en diferenciales exactas de funciones de x, y, θ, ϕ.

Problema 13: Determine la variación en la función de movimiento $x(t)$ de una partícula, producida por la adición de una cantidad pequeña $\delta U(x)$ al campo $U(x)$, en una región finita donde *no* existen puntos de retorno. Suponga conocidas las condiciones iniciales.