Mecánica

Guía 4: Movimiento unidimensional y Potencial central - 26 de septiembre de 2023

Problema 1: Determine el movimiento de una partícula de masa m en

a) el potencial de Morse $U(x) = A\left(e^{-2ax} - 2\,e^{-ax}\right)$, $A > 0$, $a > 0$;

b) el potencial $U(x) = -A\,x^4$, $A > 0$, con energía $E = 0$.

Problema 2: Halle una expresión para el período de oscilación entre dos puntos de retorno en un potencial $U(x)$, en función de la energía E.

Problema 3: Mediante un desarrollo en serie de Taylor del potencial $U(x)$ alrededor del punto $x = a$, determine aproximadamente la función de movimiento $x(t)$ de una partícula para $x \simeq a$,

a) cuando $x = a$ es un punto de retorno, es decir $E = U(a)$, con $U'(a) \neq 0$;

b) cuando $x = a$ es un punto de retorno con $U'(a) = 0$ y $U''(a) < 0$;

c) cuando $x = a$ es un máximo cuadrático de U y $E \lesssim U(a) \quad (E \to U(a)^-)$;

d) cuando $x = a$ es un máximo cuadrático de U y $E \gtrsim U(a) \quad (E \to U(a)^+)$.

Compare los resultados del punto **a)** con el movimiento cerca de la máxima altura en un tiro vertical, y los de los puntos **b) - d)** con el movimiento de un péndulo simple cerca de su posición de equilibrio inestable.

***Problema 4:** Determine la variación en la función de movimiento $x(t)$ de una partícula, producida por la adición de una cantidad pequeña $\delta U(x)$ al campo $U(x)$, en una región finita donde *no* existen puntos de retorno. Suponga conocidas las condiciones iniciales.

Problema 5: Considere el *péndulo esférico*: una partícula de masa m restringida a moverse en la superficie de una esfera de radio R, bajo la acción de la gravedad $\boldsymbol{g} = -g\hat{\boldsymbol{z}}$.

a) Escriba la lagrangiana del sistema partiendo de coordenadas esféricas y determine las coordenadas ignorables y los invariantes.

b) Defina una *energía potencial efectiva* $U_{\text{ef}}(\theta)$ e integre las ecuaciones de movimiento. Determine (al menos cualitativamente) las regiones permitidas para el movimiento de la partícula.

Problema 6: Considere el movimiento en un potencial central $U(r) = -\alpha/r^n$, $n \geq 1$, $\alpha > 0$.

a) Determine para qué valores de n la partícula puede *caer al centro* de potencial.

b) Si hay caída, determine si el tiempo de caída es finito.

c) Si hay caída, determine si el número de vueltas alrededor del centro es finito.

d) Resuelva la ecuación de movimiento en la aproximación de r pequeño.

Problema 7: Determine qué potencial central admite órbitas circulares que pasan por el centro de potencial. (Solución: $U(r) = -\alpha/r^4$, $\alpha > 0$. ¡Demuéstrelo!)

***Problema 8:** Cuando se añade al potencial central $U(r) = -\alpha/r$ ($\alpha > 0$) una pequeña corrección $\delta U(r)$, la trayectoria para un movimiento finito deja de ser cerrada, y con cada revolución el periápside de la órbita se desplaza un pequeño ángulo $\delta\phi$. Determine $\delta\phi$ para

a) $\delta U = \beta/r^2$, **b)** $\delta U = \gamma/r^3$.

Problema 9: Considere nuevamente un potencial central $U(r) = -\alpha/r^n$, $\alpha > 0$. Determine para qué valores de n son posibles órbitas circulares estables.

Problema 10: Del hecho que la energía potencial es una función homogénea de grado k de las coordenadas, deduzca

a) que en un campo gravitatorio uniforme $U = mgz$, el tiempo de caída desde una altura h debe ser proporcional a $h^{1/2}$;

b) que en un pozo de potencial cuártico $U = \kappa\, x^4$, el período de una oscilación de amplitud a debe ser proporcional a a^{-1};

c) que en un pozo de potencial cuasi-armónico $U(x) = |x|^{2+\epsilon}$, $|\epsilon| \ll 1$, el período de oscilación disminuye al aumentar la amplitud si $\epsilon > 0$, pero aumenta con la amplitud si $\epsilon < 0$.

Problema 11: Para una partícula que se mueve en un potencial central kepleriano $U(r) = -\alpha/r$, es útil definir el *vector de Lenz* (o de Laplace–Runge–Lenz) como $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{J} - k\,\boldsymbol{r}/r$.

a) Demuestre que $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ se conserva para una adecuada elección de k. ¿En qué dirección apunta $\boldsymbol{\mathcal{L}}$?

b) Utilice el invariante $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ para calcular las trayectorias del problema de Kepler.

***Problema 12:** Un oscilador armónico tridimensional (isotrópico) consiste en una partícula de masa m que se mueve en el potencial $U(r) = \frac{1}{2}\, m\, \omega^2 r^2$.

a) Integre las ecuaciones de movimiento, y muestre que las órbitas son elipses *centradas* en el origen.

b) Obtenga la velocidad angular de precesión cuando se agrega una pequeña perturbación $\delta U = \beta/r^4$, con $\beta \ll m\,\omega^2\, a^6$, $\beta \ll m\,\omega^2\, b^6$, donde a y b son los semiejes de la trayectoria (elíptica) no perturbada.

Problema 13: Determine la sección eficaz total para captura de meteoritos por la Tierra en función de v_∞ y el parámetro de impacto b. Suponga como condición de captura que la distancia al centro de la Tierra en el perigeo de la órbita sea menor que el radio terrestre. Compare con el área de sección geométrica de la Tierra. ¿En qué límite son iguales?

Problema 14: Determine la sección eficaz diferencial y total de dispersión en cada uno de los siguientes casos:

a) pozo de potencial esférico de radio a y profundidad U_o , $\quad U(r) = \begin{cases} -U_o & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$

***b)** $U(r) = \alpha/r^2$ $(\alpha > 0)$;

***c)** partículas dispersadas elásticamente por una superficie lisa de revolución $\rho = f(z)$ $(\rho, \phi, z$ coordenadas cilíndricas); la dirección de incidencia es paralela al eje z, y $f(z)$ es monótonamente creciente.

***Problema 15:** Considere un cúmulo globular donde una medición del corrimiento de las líneas espectrales ha determinado que las velocidades radiales de sus estrellas tienen una dispersión Δv_r, y mediciones de distancia y tamaño angular han permitido estimar su radio R. Asumiendo que todas las estrellas del cúmulo tienen masas comparables, y que sus velocidades están distribuidas isotrópicamente, muestre cómo puede usarse el Teorema virial para estimar la masa del cúmulo.

* Opcionales.