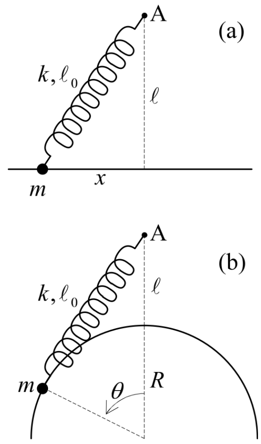
# Mecánica

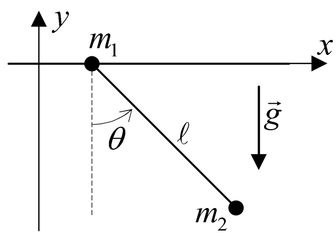
**Guía 5: Pequeñas oscilaciones** - 10 de octubre de 2023




**Problema 1:** Calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones para una partícula de masa $m$ ubicada cerca de los mínimos de los siguientes potenciales:

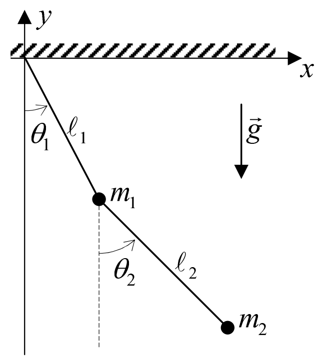
**a)** $U(x) = V\cos(ax) - Fx\,,$ **b)** $U(x) = V\left(a^2x^2 - \operatorname{sen}^2(bx)\right).$

**Problema 2:** Una partícula de masa $m$ desliza sin fricción a lo largo de un alambre como se muestra en las figuras (a) y (b), y está unida a un punto fijo $A$ por un resorte ideal de constante elástica $k$ y longitud natural $\ell_o < \ell$. Para cada caso escriba la energía potencial de la partícula, y determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.




**Problema 3:** Determine las frecuencias y modos normales para las pequeñas oscilaciones de un péndulo de masa $m_2$ y longitud $\ell$ cuyo punto de soporte es la masa $m_1$, la cual puede moverse libremente sobre un eje horizontal como se muestra en la figura.

**Problema 4:** Considere pequeñas oscilaciones en el péndulo doble coplanar de longitudes $\ell_1$ y $\ell_2$ y masas $m_1$ y $m_2$, mostrado en la figura.




**a)** Determine las configuraciones de equilibrio estable del sistema.

**b)** Escriba la lagrangiana de pequeñas oscilaciones y las correspondientes ecuaciones de movimiento.

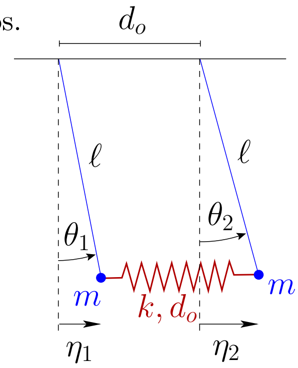
**c)** Calcule las frecuencias características del sistema.

**d)** Determine los modos normales e interprételos físicamente.

**e)** Interprete físicamente el límite $m_1 \to \infty$.

**f)** Para el caso $m_1 = m_2 = m$ y $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, determine las coordenadas normales y reescriba la lagrangiana de pequeñas oscilaciones en términos de ellas.

**Problema 5:** Dos péndulos idénticos de masa $m$ y longitud $\ell$ están conectados mediante un resorte de constante $k$ y longitud natural $d_o$, igual a la separación de los puntos de suspensión de los péndulos. El sistema evoluciona en un plano, mostrado en la figura.

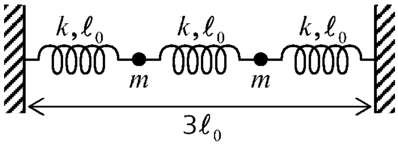



**a)** Determine las configuraciones de equilibrio estable del sistema.

**b)** Escriba la lagrangiana de pequeñas oscilaciones y las correspondientes ecuaciones de movimiento.

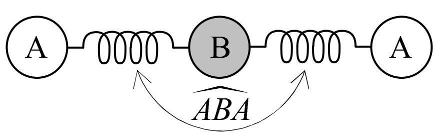
**c)** Calcule las frecuencias características del sistema.

**d)** Determine los modos normales e interprételos físicamente.




**Problema 6:** Determine las frecuencias y modos normales de vibraciones longitudinales del sistema de la figura, e interprételos físicamente.

**Problema 7:** Determine las frecuencias y modos normales de vibraciones de la molécula lineal triatómica simétrica de la figura, suponiendo que la energía potencial es función de las distancias $A$-$B$ y $B$-$A$ y del ángulo $\widehat{ABA}$, que todo movimiento está restringido al plano de la figura, y que la molécula no rota.



**Problema 8:** Calcule el cociente entre las frecuencias de oscilación $\omega$ y $\omega'$ de dos moléculas diatómicas formadas por diferentes isótopos de los mismos elementos. Las masas de los átomos en dichas moléculas son $m_1$, $m_2$ y $m_1'$, $m_2'$, respectivamente. Asuma que los diferentes isótopos de un mismo elemento interactúan de igual manera.

**Problema 9:** Determine la corrección a la frecuencia de pequeñas oscilaciones de una molécula diatómica, debida a la presencia de un *pequeño* momento angular.

***Problema 10:** Determine la amplitud final de las oscilaciones de un sistema cuya frecuencia característica es $\omega$, bajo la acción de la fuerza

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ F_o t/T & 0 < t < T \\ F_o & t > T \end{cases}$$

considerando que hasta el instante $t = 0$ el sistema se encontraba en reposo en su posición de equilibrio.

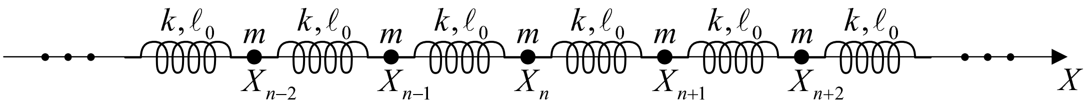
***Problema 11:** Considere un paraboloide de sección elíptica dado por

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \ ,$$

con $a > b > 0$. El mismo gira alrededor del eje $z$ con velocidad angular constante $\omega$. Dicho eje está ubicado paralelo a un campo gravitarorio constante $g$ en la dirección negativa. Sobre su superficie se mueve, libre de rozamiento, una partícula puntual de masa $m$.

- **a)** ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?
- **b)** Escriba la lagrangiana en un referencial solidario al paraboloide.
- **c)** ¿Qué cantidades se conservan?
- **d)** Plantee las ecuaciones de movimiento e interprete físicamente los distintos términos obtenidos.
- **e)** En el mismo referencial, describa las posibles configuraciones de equilibrio.
- **f)** Describa el movimiento de la partícula para pequeños apartamientos de la configuración de equilibrio.
- **g)** ¿Para qué valores de $\omega$ la configuración de equilibrio se vuelve inestable?

***Problema 12:** Considere una cadena *infinita* de masas puntuales idénticas $m$, unidas entre sí por resortes también idénticos de constante $k$ y longitud natural $\ell_o$, como se muestra en la figura. Suponga que las masas solo pueden moverse a lo largo del eje $X$, y que en el reposo cada masa $m_n$ ($-\infty < n < \infty$) se halla en $X_{n0} = n\ell_o$ de modo que todos los resortes tienen su longitud natural.




- **a)** Muestre que si $x_n \equiv X_n - X_{n0}$ es el apartamiento de cada masa de su posición de equilibrio, la lagrangiana del sistema puede escribirse como

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}_n^2 + \frac{1}{2} k x_n (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) \right] \ .$$

- **b)** Escriba las ecuaciones de Euler-Lagrange.
- **c)** Proponga soluciones de la forma

$$x_n(t) = e^{i(n\kappa\,\ell_o - \omega t)}$$

  y muestre que debe cumplirse la *relación de dispersión*

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \operatorname{sen} \frac{\kappa\,\ell_o}{2}, \quad -\frac{\pi}{\ell_o} \le \kappa \le \frac{\pi}{\ell_o}$$

  entre la frecuencia $\omega$ y el número de onda $\kappa$.

* Opcionales.