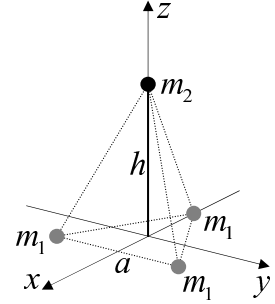


Mecánica

Guía 6: Cuerpo rígido y sistemas rotantes - 26 de octubre de 2023

Problema 1: Determine los ejes y momentos principales de inercia respecto del CM para los siguientes cuerpos rígidos:

- Molécula de cuatro átomos que forman un tetraedro de base equilátera (por ejemplo NH_3). Los tres átomos de la base son de masa m_1 y forman un triángulo equilátero de lado a , mientras que el cuarto átomo, de masa m_2 , dista del centro de la base una distancia h . Considere también el caso del tetraedro regular con todos los átomos de igual masa y caras equiláteras idénticas.
- Cilindro circular homogéneo de radio R y altura h .
- Cono circular homogéneo de altura h y radio de la base R .
- Elipsoide homogéneo de semiejes a , b y c .
- Esfera homogénea de radio a , en cuyo interior se halla una cavidad esférica de radio $a/2$, cuyo centro está desplazado respecto del de la esfera una distancia $a/3$. Utilice el teorema de Steiner.



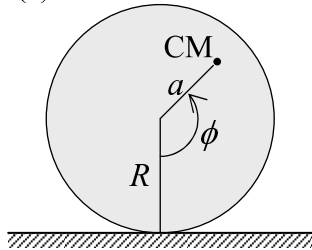
Problema 2: *Teorema de Steiner.* Muestre que el tensor de inercia respecto de un punto P distinto del CM es

$$I_{ij}^P = I_{ij}^{\text{CM}} + m [a_i a_j \delta_{ij} - a_i a_j],$$

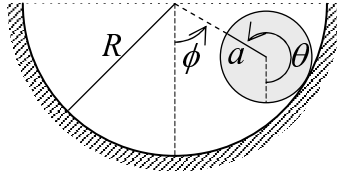
donde a_i son las componentes (en el sistema fijo al cuerpo) del vector $\mathbf{a}$ que da la posición de P respecto del CM. Muestre además que si $\mathbf{a}$ es paralelo a un eje principal de inercia de I_{ij}^{CM} , entonces I_{ij}^P tendrá el mismo sistema de ejes principales (salvo traslaciones). Para este último caso, calcule el cambio de los momentos principales de inercia.

Problema 3: Usando las condiciones de vínculo, calcule la energía cinética de los siguientes cuerpos rígidos:

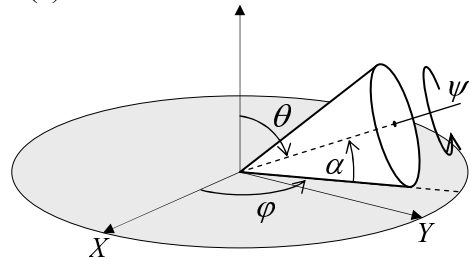
(a)



(b)

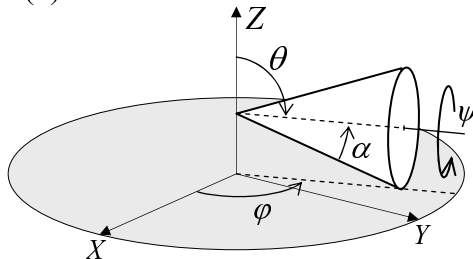


(c)

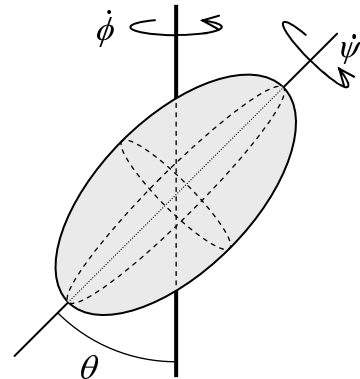


- Un cilindro *inhomogéneo* de radio R que rueda sobre un plano. La masa se encuentra distribuida de forma tal que un eje principal de inercia es paralelo al eje del cilindro y el centro de masa se encuentra desplazado una distancia $a < R$ del eje geométrico. El momento de inercia asociado a dicho eje principal es I .
- Un cilindro homogéneo de radio a que rueda dentro de una superficie cilíndrica de radio $R > a$.
- Un cono homogéneo que rueda apoyado sobre un plano.

(d)



(e)



- Un cono homogéneo cuya base rueda sobre un plano y cuyo vértice permanece a una altura sobre el plano igual al radio de la base, de modo que el eje del cono queda paralelo al plano.

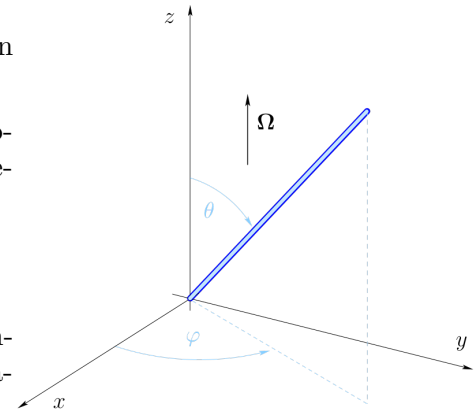
- e) Un elipsoide homogéneo que rota con velocidad angular $\dot{\psi}$ alrededor de uno de sus ejes principales (respecto del cual es simétrico), el cual a su vez gira con velocidad angular $\dot{\phi}$ alrededor de un eje vertical con el cual forma un ángulo θ constante.

Problema 4: Una varilla *muy* delgada de masa M y longitud L está sujeta por un extremo de manera que puede girar con el eje de la varilla formando un ángulo fijo $\theta > 0$ con la velocidad angular $\mathbf{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{k}}$. La varilla puede considerarse un *sistema de masas colineales*, y se encuentra bajo la acción de la gravedad $\mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{k}}$, y gira con velocidad $\mathbf{\Omega}$ constante.

- a) Escriba la energía cinética *total* de la varilla en estas condiciones, en términos de M , L , Ω y θ .
- b) Muestre que eligiendo adecuadamente las condiciones iniciales, el momento angular de la varilla respecto del punto de soporte puede expresarse como

$$\mathbf{J} = \frac{ML^2}{3} \Omega \sin \theta [\cos \theta (\sin(\Omega t) \hat{\mathbf{i}} - \cos(\Omega t) \hat{\mathbf{j}}) + \sin \theta \hat{\mathbf{k}}]$$

- c) Determine el torque aplicado *por el soporte* para mantener el movimiento descrito (nuevamente, respecto del origen del sistema de coordenadas).



Problema 5: Un disco de masa M y radio R pende de un punto de su circunferencia, alrededor del cual puede girar libremente en el plano vertical que contiene al plano del disco. En el extremo opuesto al punto de suspensión se cuelga una varilla de masa m y largo ℓ , que también gira libremente, siempre en el mismo plano. La aceleración de la gravedad es g . Llamamos α al ángulo del vector que señala el centro del disco desde su punto de suspensión, medido en sentido antihorario desde el punto más bajo, y β al ángulo entre la varilla y la vertical, medido del mismo modo.

- a) Determine la energía cinética y la lagrangiana del sistema. ¿Exhibe un mínimo este potencial?
- b) Muestre que la lagrangiana de pequeñas oscilaciones puede escribirse

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} M + 4m \right) R^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{3} \dot{\beta}^2 + mR\ell \dot{\alpha}\dot{\beta} - \frac{1}{2} (M + 2m) gR \alpha^2 - \frac{1}{2} \frac{mg\ell}{2} \beta^2 .$$

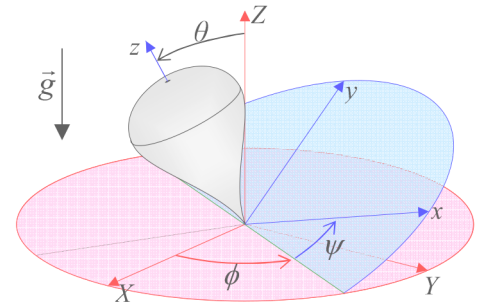
→ **De ahora en más suponga el siguiente caso: $R = 4\ell/9$ y $M = 3m/2$.**

- c) Encuentre los modos normales de oscilación de este sistema.
- d) Describa el movimiento del sistema cuando parte del reposo, con el disco en el punto más bajo y la varilla formando un ángulo ϕ_0 con la vertical.

Problema 6: Determine las ecuaciones y estudie el movimiento de una esfera homogénea que rueda sin deslizar sobre un plano inclinado bajo la acción de la gravedad.

Problema 7: Considere un trompo simétrico en un campo gravitatorio uniforme, con su punto inferior fijo.

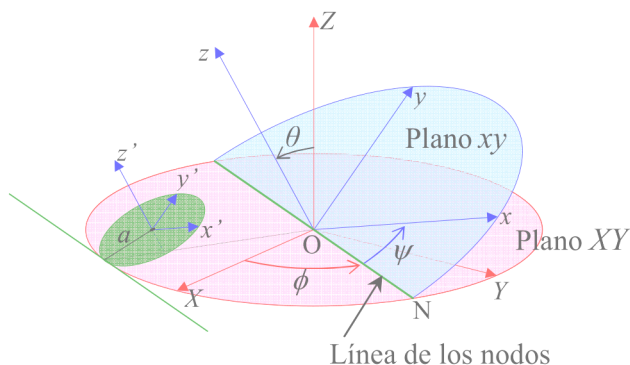
- a) Construya la lagrangiana. Determine los invariantes, y a partir de estos estudie el movimiento. (Landau, pp. 134-136.)
- b) Determine la condición de estabilidad para la rotación del trompo alrededor de un eje vertical. (Landau, p. 136.)
- c) Determine el movimiento del trompo para el caso en que la energía cinética de rotación alrededor de su eje de simetría es grande comparada con su energía potencial en el campo gravitacional (*trompo rápido*). (Landau, pp. 137-138.)



Problema 8: Considere un disco plano homogéneo de radio a y espesor despreciable, que puede rotar y deslizarse libremente apoyado sobre una superficie plana horizontal *sin rozamiento*, pero sin perder nunca contacto con ella. Para describir su movimiento considere un sistema “de laboratorio” X, Y, Z cuyo eje Z es vertical y cuyo plano XY coincide con la superficie, un sistema fijo al cuerpo x', y', z' paralelo al x, y, z (ver

figura) cuyo eje z' es el eje de simetría del disco y cuyo plano $x'y'$ es el plano del disco, y ángulos de Euler ϕ, θ, ψ tales que la intersección del plano del disco con el plano XY sea paralela a la línea de los nodos $\overline{ON}$.

- Escriba la lagrangiana del sistema. ¿Cuántos grados de libertad tiene?
- Determine los invariantes. En particular, muestre que P_X y P_Y son constantes. Asuma entonces para el resto del problema que $P_X = P_Y = 0$.
- Use los invariantes para construir un potencial efectivo para el movimiento en θ . Muestre que si el disco rota manteniendo θ constante, entonces $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ son constantes también (*precesión uniforme*).
- Determine bajo qué condiciones es estable la rotación del disco con su eje horizontal ($\theta = \pi/2$).

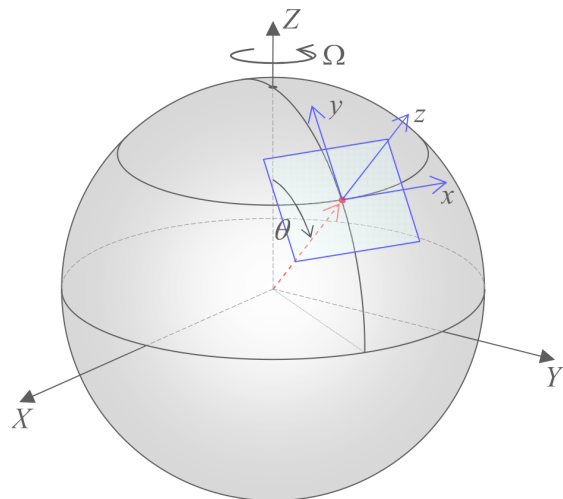


***Problema 9:** Considere un satélite natural o artificial en órbita circular alrededor de una primaria (esférica) de masa mucho mayor. Asuma que el satélite puede aproximarse por un trompo simétrico con $I_1 = I_2 > I_3$.

- Muestre que el satélite tiende a orientarse con su “eje largo” en la dirección radial respecto a la primaria.
- Estime la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor de esa orientación (asuma una órbita circular).

***Problema 10: Péndulo de Foucault.** Determine el efecto de la rotación de la Tierra sobre las pequeñas oscilaciones de un péndulo en colatitud θ . ¿Cuánto rota el plano de oscilación al cabo de un día?

Problema 11: Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con velocidad inicial v_0 . El lugar del disparo se encuentra en colatitud θ . Demuestre que al retornar, el objeto cae desplazado hacia el oeste una distancia $4\Omega v_0^3 \sin \theta / 3g^2$ del punto de disparo. En esta expresión, Ω es la velocidad angular de rotación terrestre y g la aceleración gravitatoria en la superficie en el punto de disparo. Desprecie el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, como así también los efectos de fricción atmosférica. Suponga que la altura máxima alcanzada es mucho menor que el radio terrestre.



***Problema 12:** Un astronauta de la Estación Espacial Internacional, tras largos e infructuosos esfuerzos por aflojar un perno rebelde de un panel de inspección, se da cuenta de que ha terminado por arruinarle la cabeza, por lo que en un arranque de frustración lanza su llave al espacio. Describa el movimiento de la llave visto por el astronauta si la arroja: (a) en dirección paralela a la velocidad orbital de la estación; (b) en dirección radial hacia la Tierra; (c) en dirección transversal a las dos precedentes; (d) igual que cada caso anterior pero invirtiendo el sentido. ¿Sería inteligente de parte del astronauta quedarse contemplando el panorama para calmarse? ¿Por cuánto tiempo?

* Opcionales.