Mecánica

Guía 7: Formalismo hamiltoniano - 7 de noviembre de 2023

Problema 1: Escriba el hamiltoniano y las correspondientes ecuaciones de Hamilton para una partícula libre en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Problema 2: Escriba el hamiltoniano y las correspondientes ecuaciones de Hamilton para una partícula en un potencial central. Analice el problema de Kepler en esta descripción.

Problema 3: Determine la función de Hamilton correspondiente al oscilador anarmónico cuya función de Lagrange es

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 - \frac{1}{2}\, \omega^2\, x^2 - \alpha\, x^3 + \beta\, x\, \dot{x}^2.$$

Problema 4: Para cada uno de los siguientes sistemas hamiltonianos, construya las trayectorias en el espacio de fases y discuta cualitativamente los diferentes movimientos posibles:

a) oscilador armónico $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2}kq^2$;

b) péndulo simple $H = \dfrac{p^2}{2m} - mg\ell\cos q$;

***c)** potencial cúbico $H = \dfrac{p^2}{2m} - aq + bq^3$, $a, b > 0$.

Problema 5: Determine la función de Hamilton correspondiente a una partícula en un campo conservativo, en términos de las coordenadas cartesianas de un sistema que rota uniformemente alrededor del eje z con velocidad angular Ω. ¿Cuál es el significado físico del hamiltoniano en este caso?

→ En los siguientes problemas conviene tener presentes las propiedades de los paréntesis de Poisson:

- $[f, g] = -[g, f]$ *(antisimetría)*;
- $[af + bg, h] = a[f, h] + b[g, h], \quad [h, af + bg] = a[h, f] + b[h, g], \quad a, b \in \mathbb{R}$ *(bilinealidad)*;
- $[fg, h] = [f, h]g + f[g, h]$ *(Leibniz)*;
- $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$ *(Jacobi)*.

Problema 6: Dados el momento lineal $\boldsymbol{p} = p_i\, \hat{\boldsymbol{e}}_i$ y el momento angular $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = J_i\, \hat{\boldsymbol{e}}_i$ de una partícula, expresados en la base cartesiana $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\}$, calcule $[p_i, J_j]$ y $[J_i, J_j]$.

Problema 7: Muestre que si el hamiltoniano y una cantidad F son invariantes de un sistema mecánico, entonces $\partial F/\partial t$ también lo es. Como ilustración considere el movimiento de una partícula libre de masa m: el hamiltoniano se conserva; considere el invariante $F = x - p\,t/m$ y muestre por cálculo directo que el invariante $\partial F/\partial t$ coincide con $[H, F]$.

Problema 8: Pruebe que una rotación en el espacio de fases de un sistema con un grado de libertad, es una transformación canónica, aun si el ángulo de rotación depende del tiempo.

Problema 9: Considere la transformación $\quad Q = \ln(1 + \sqrt{q}\, \cos p), \qquad P = 2\,(1 + \sqrt{q}\, \cos p)\sqrt{q}\, \operatorname{sen} p\,.$

a) Demuestre que (Q, P) son variables canónicas si (q, p) lo son.

b) Muestre que la función que genera esta transformación es $F(Q, p) = -(e^Q - 1)^2\, \operatorname{tg} p\,.$

Problema 10: Resuelva el problema del oscilador armónico utilizando las variables canónicas (P, Q) obtenidas a partir de la función generatriz

$$F = \frac{m}{2}\, \omega\, q^2\, \operatorname{cotg} Q\,.$$

***Problema 11:** ¿Qué condición debe satisfacer la función $F(q, P)$ para que sea posible utilizarla como función generatriz de una transformación canónica? Considere en particular el ejemplo $F(q, P) = q^2 + P^2$.

Problema 12: ¿Qué significado tiene la transformación canónica generada por $F(q, P) = \alpha\, q\, P$?

Problema 13: a) Demuestre que la transformación

$$x = X \cos\lambda + \frac{P_y}{m\omega} \operatorname{sen}\lambda\,, \qquad y = Y \cos\lambda + \frac{P_x}{m\omega} \operatorname{sen}\lambda\,,$$

$$p_x = -m\,\omega\, Y \operatorname{sen}\lambda + P_x \cos\lambda\,, \qquad p_y = -m\,\omega\, X \operatorname{sen}\lambda + P_y \cos\lambda$$

es canónica.

b) Halle la función generatriz $G(x, y, X, Y)$ y la nueva función de Hamilton $H'(P_x, P_y, X, Y)$ si

$$H(p_x, p_y, x, y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

c) Describa, en término de las variables originales, el movimiento de un oscilador bidimensional cuando $Y = P_y = 0$.

Problema 14: Considere una partícula libre de masa m en $\mathbb{R}^3$. Utilice coordenadas cartesianas y calcule la acción $S(x, y, z, t)$ correspondiente a la trayectoria física que parte desde el origen en $t = 0$ y llega a (x, y, z) al tiempo t. Verifique que $S(x, y, z, t)$ satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi para este sistema. Repita este problema usando coordenadas esféricas.

Problema 15: Resuelva el movimiento de un proyectil puntual en el espacio bajo la influencia de una fuerza gravitatoria uniforme, usando el método de Hamilton-Jacobi. Encuentre la ecuación de la trayectoria y la dependencia de las coordenadas con el tiempo.

Problema 16: Utilizando la ecuación de Hamilton-Jacobi, encuentre las ecuaciones de movimiento y la trayectoria de una partícula en el campo $U(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x^2 + y^2\right)$. Proceda tanto en coordenadas cartesianas como polares.

***Problema 17:** Considere el movimiento de una partícula en un campo central kepleriano.

a) Escriba la ecuación de Hamilton-Jacobi para el movimiento *bidimensional* en el plano ortogonal al momento angular, y verifique que es separable en coordenadas polares. Interprete físicamente cada una de las "acciones parciales" obtenidas en la separación.

b) Escriba la ecuación de Hamilton-Jacobi para el movimiento *tridimensional* (es decir, sin asumir ninguna orientación particular para el momento angular), y verifique que es separable en coordenadas esféricas. Interprete físicamente cada una de las "acciones parciales" obtenidas en la separación.

* Opcionales.