

Física del Estado Sólido

Guía 1 - 15 de marzo de 2023

Problema 1. Distribución exponencial.

En el modelo de Drude la probabilidad de que un electrón sufra una colisión en un intervalo de tiempo infinitesimal dt es dt/τ .

- Muestre que la probabilidad de que un electrón tomado al azar no haya sufrido colisiones en los t segundos precedentes es una exponencial decreciente con tiempo característico de decaimiento τ .
- Muestre que la probabilidad de colisión entre t y $t + dt$ es $e^{-t/\tau} dt/\tau$, considerando que en $t = 0$ hubo una colisión.

Problema 2. Efecto Joule.

Considere un metal a temperatura uniforme en un campo eléctrico estático uniforme $\mathbf{E}$. Un electrón experimenta una colisión y entonces después de un tiempo t una segunda colisión. En el modelo de Drude la energía no se conserva en las colisiones.

- Muestre que la energía media cedida a los iones en la segunda de dos colisiones separadas por un tiempo t es $(eEt)^2/(2m)$ (el promedio es sobre todas las direcciones en las que el electrón emerge de la primera colisión).
- La energía media perdida por cm^3 por segundo es: $(ne^2\tau/m)E^2 = \sigma E^2$. Deduzca que la potencia disipada en un alambre conductor es $I^2 R$, donde I es la corriente eléctrica que fluye y R es la resistencia eléctrica del alambre.

Problema 3. Ley de Wiedemann-Franz.

La ley de Wiedemann-Franz establece que el cociente entre la conductividad térmica y eléctrica κ/σ es directamente proporcional a la temperatura T . La Ley de Fourier para la corriente térmica (equivalente a la de Ohm) establece que $\mathbf{j}^{(q)} = -\kappa \nabla T$. Muestre utilizando un modelo unidimensional con gradiente térmico que dentro del modelo de Drude la conductividad térmica está dada por $\kappa = \ell v c_v$, en donde ℓ es el camino libre medio, v es la velocidad electrónica promedio y c_v es el calor específico (por unidad de volumen) a volumen constante. Calcule el número de Lorenz $\kappa/(\sigma T)$ y compare con los resultados experimentales para cobre (Cu) y hierro (Fe).

Problema 4. Distribución de Fermi-Dirac.

- Utilizando los factores de peso estadístico de Boltzmann y el principio de exclusión de Pauli, deduzca la distribución de Fermi-Dirac.
- (Numérico) Dibuje la distribución de Fermi-Dirac para las temperaturas 100 K, 2000 K y 4000 K considerando un potencial químico $\mu = 10 \text{ eV}$.

Problema 5. Efecto Hall Clásico

Considere una lámina conductora bidimensional en el plano $x-y$ bajo la acción de un campo eléctrico constante y uniforme en la dirección $\hat{x}$ y un campo magnético, también constante y uniforme en la dirección $\hat{z}$. El campo eléctrico se traduce en un corriente constante J_x , lo que significa que los portadores pierden la energía entregada por el campo de alguna manera. En la descripción de Drude sólo tenemos portadores libres que en promedio colisionan luego de cierto tiempo característico τ y puede escribirse para las fuerzas sobre los portadores,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q_c \left(\mathbf{E} + \frac{1}{mc} \mathbf{p} \times \mathbf{H} \right) - \frac{\mathbf{p}}{\tau},$$

en donde q_c es la carga del portador de tipo c y el término $\mathbf{p}/\tau$ representa el amortiguamiento debido a las colisiones.

- a) Plantee una situación estacionaria $d\mathbf{p}/dt=0$ y encuentre los tensores resistividad ρ y conductividad σ que relacionan el campo con la corriente $\mathbf{E}=\rho\mathbf{J}$ y $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$. Utilice la frecuencia de ciclotrón $\omega_c=q_cH/(mc)$ y la conductividad de Drude $\sigma_o=n_cq_c^2\tau/m$ para expresar las cantidades pedidas.
- b) Encuentre el coeficiente de Hall $R_H=\rho_{xy}/H_z$, la magnetoresistencia $\rho_{xx}=1/\sigma_o$ y la resistencia de Hall ρ_{xy} . Muestre que el signo de la carga q_c determina el signo del coeficiente de Hall.
- c) Suponga ahora que se corta la lámina en la dirección $\hat{\mathbf{y}}$ de modo que tenemos una cinta en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$. Explique cualitativamente qué sucede y calcule el campo de Hall E_y .

Problema 6. *Densidad de estados.*

La densidad de estados (DOS) $g(\varepsilon)$ de un sistema con dispersión de energía $\varepsilon(\mathbf{k})$ se define como la cantidad de estados por unidad de energía entre ε y $\varepsilon+d\varepsilon$. Dicha densidad puede expresarse como una integral en el espacio $\mathbf{k}$ sobre todos los estados con energía $\varepsilon(\mathbf{k})=\varepsilon$.

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{V} \sum_{\sigma} \sum_{\mathbf{k}} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{k}))$$

en donde la suma sobre σ aporta la degeneración de cada estado. El volumen del espacio $\mathbf{k}$ que ocupa un estado en el caso n -dimensional es $(2\pi)^n/V$, de modo que tomando el límite $V \rightarrow \infty$,

$$g(\varepsilon) = \sum_{\sigma} \int_{\Omega_k} \frac{d^n \mathbf{k}}{(2\pi)^n} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{k}))$$

a) Muestre que para 1D
$$\int_{x_i}^{x_f} h(x) \delta(g(x)) dx = \sum_n \frac{h(x_n)}{|g'(x_n)|},$$

donde $g(x_n)=0$ y $x_n \in [x_i, x_f]$; generalice para n -dimensiones.

- b) En el caso n -dimensional la expresión está dada por,

$$g(\varepsilon) = \sum_{\sigma} \int_{S(\varepsilon)} \frac{d^{n-1} \mathbf{k}}{(2\pi)^n} \frac{1}{|\nabla \varepsilon(\mathbf{k})|},$$

en donde $S(\varepsilon)$ es una superficie del espacio $\mathbf{k}$ sobre la cual todos los estados tienen energía ε . Comente sobre las diferencias entre el caso 1D y n -dimensional.

- c) Calcule la DOS para $n=1, 2, 3$ en el caso de dispersión cuadrática $\varepsilon(\mathbf{k})=k^2$ (partículas masivas, *p. ej.* electrones) y en el caso de dispersión lineal $\varepsilon(\mathbf{k})=k$ (partículas sin masa, *p. ej.* fotones), utilizando la expresión dada en el ítem b).

Problema 7. *Calor específico de un metal.*

Utilizando la distribución de Fermi y la teoría de Sommerfeld, argumente sin realizar la derivación exacta por qué el calor específico c_v cambia linealmente con la temperatura (en esta aproximación). Compare con el calor específico de un metal en el modelo de Drude y en la teoría de Sommerfeld (exacto).

Problema 8. *Potencial químico.*

A $T=0$ el potencial químico μ es igual a la energía de Fermi ϵ_F . Considere un metal 1D donde cada átomo aporta un electrón de valencia, están separados por una distancia a e interactúan con acople V . Suponga una dispersión 1-dimensional de la forma $\varepsilon(k) = 2V - 2V \cos(ka)$ y calcule la DOS. Analice especialmente los casos $\varepsilon = 0, 2V, 4V$. Diga cuál es el potencial químico a $T=0$ de este metal. ¿Qué ocurre si cada átomo aporta 2 electrones de valencia?