Física del Estado Sólido

Guía 5 – 3 de mayo de 2023

Problema 1. En el modelo semiclásico se considera que las ecuaciones de movimiento para un electrón en un sólido que ocupa una banda n están dadas por

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\hbar}\nabla_{\boldsymbol{k}}\varepsilon_n(\boldsymbol{k}) \qquad\qquad \hbar\dot{\boldsymbol{k}}(t) = -e\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\right] \ ,$$

donde $\boldsymbol{k}$ es el momento cristalino y $\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{k})$ la velocidad del electrón (paquete de ondas).

a) Muestre que con este modelo la corriente eléctrica aportada por una banda llena es nula.

b) Muestre que la corriente eléctrica generada por electrones que ocupan ciertos estados de una banda (semillena) es equivalente a la generada por “huecos” de carga positiva en los estados desocupados.

c) Analice qué sucede con el momento cristalino y la velocidad del electrón bajo la acción de un campo eléctrico constante para una relación de dispersión $\varepsilon(\boldsymbol{k})$ dada por la de una cadena tight-binding unidimensional. Vea especialmente la región cercana al plano de Bragg $k_o = \pi/a$.

d) Realice una expansión hasta segundo orden en $\boldsymbol{k}$ de la relación de dispersión $\varepsilon(\boldsymbol{k})$ de la cadena unidimensional alrededor del plano de Bragg $k_o = \pi/a$. Utilizando la expansión, defina la masa efectiva del “hueco” m^* tal que $m^*\boldsymbol{a}(t) = +e\,[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)]$. Repita para el mismo $k_o = \pi/a$ considerando ahora el electrón. Analice el caso de huecos en el tope de la segunda banda ($k_1 = 0 + 2\pi/a$).

Problema 2. Considere una muestra cuadrada con bordes en $x = \pm a$, $y = \pm a$. Se adhieren unos electrodos a los bordes izquierdo y derecho para obtener un potencial $\phi = -V$ en $x = -a$ y $\phi = V$ en $x = a$. Asuma que $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ es muy pequeña, pero no nula, y que $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$ es constante (note que el tensor de conductividad en el efecto Hall depende del campo magnético aplicado a través de la frecuencia de ciclotrón ω_c; comente sobre la posibilidad de encontrar en ese caso las condiciones que se piden aquí al tensor σ). Una corriente estacionaria I fluye a través de la muestra.

a) Usando la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Maxwell muestre que

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \ .$$

b) Muestre que la corriente sale por una esquina habiendo entrado a la muestra por la esquina opuesta.

c) Muestre que el potencial de Hall es igual al voltaje entre la fuente y el sumidero.

Problema 3. El hamiltoniano de un electrón en una superficie bidimensional, cuando está sometido a un campo eléctrico $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{x}}$ y un potencial vector $\boldsymbol{A} = (0, Bx, 0)$, está dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e}\left[\hat{p}_x^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{eBx}{c}\right)^2\right] - eEx \ ,$$

y el momento en la dirección y se conserva en este gauge. Proponiendo

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{ik_y y}\,\psi(x)$$

puede resolverse el problema.

Muestre que los valores de expectación del operador velocidad, $\dfrac{1}{m}(\hat{\boldsymbol{p}} + \dfrac{q}{c}\boldsymbol{A})$ resultan

$$\langle v_x\rangle_\varphi = 0 \quad , \qquad\qquad \langle v_y\rangle_\varphi = -c\,\frac{E}{B} \ ,$$

es decir la velocidad media es perpendicular a la dirección del campo eléctrico.

Problema 4. *Efecto Hall.* Considere la lámina conductora bidimensional de la guía 1, bajo la acción de campos eléctrico y magnético constantes y uniformes según $\hat{\boldsymbol{x}}$ y $\hat{\boldsymbol{z}}$, respectivamente. Sabiendo ahora que pueden existir dos tipos de portadores de carga, electrones y huecos, repita aquel análisis para el efecto Hall en semiconductores cuando los dos tipos de portadores están presentes. En esta aproximación evalúe la magnetorresistencia y el coeficiente Hall.

Problema 5. Considere una red de Bravais cúbica a la que se aplica un campo magnético en una dirección paralela a una arista de la celda cúbica unitaria. Considerando una relación de dispersión correspondiente a electrones libres, calcule el período de las órbitas cerradas en el espacio k y muestre que se obtiene el resultado clásico $T = 2\pi/\omega_c$, con $\omega_c = eH/(mc)$. ¿Existen “órbitas” abiertas? Describa qué condición se necesita para obtenerlas.