

Física del Estado Sólido

Guía 8 – 9 de junio de 2023

Problema 1. a) Verifique que las reglas de Hund para una capa ℓ con n electrones pueden escribirse en forma compacta como:

$$\mathbf{a}_1) \quad S = \frac{1}{2} [(2\ell + 1) - |2\ell + 1 - n|]$$

$$\mathbf{a}_2) \quad L = S |2\ell + 1 - n|$$

$$\mathbf{a}_3) \quad J = |2\ell - n| S$$

b) En las correcciones a las autoenergías por la interacción espín-órbita $(\Delta E)_{SO} = \lambda \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$, el factor λ puede asumirse independiente de J . Muestre que la separación energética entre los niveles de los multipletes J con idénticos números cuánticos L y S es $E_{J+1} - E_J = \lambda \hbar^2 (J+1)$ y que $E_{J_{\max}} - E_{J_{\min}} = \lambda \hbar^2 S(2L + 1)$ si $(L > S)$.

Problema 2. $\hat{\mathbf{V}} = (\hat{V}_x, \hat{V}_y, \hat{V}_z)$ es un operador vectorial si $[\hat{J}_j, \hat{V}_k] = i\hbar \varepsilon_{jkl} \hat{V}_l$, donde ε_{jkl} es el tensor totalmente antisimétrico. Utilizando este hecho, muestre que para un estado $|0\rangle$ de momento angular $J=0$, es decir $\hat{J}_i |0\rangle = 0$ ($i=x, y, z$), se cumple $\langle 0 | \hat{\mathbf{L}} + g_o \hat{\mathbf{S}} | 0 \rangle = 0$.

Esto justifica prescindir del término lineal en el paramagnetismo de Van Vleck.

Problema 3. Se aplica un campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{z}$ a un aislante en cuyo estado fundamental sus iones (no interactuantes) tienen número cuántico J , autoestado del momento angular total $\hat{\mathbf{J}}$. La energía de interacción con el campo se expresa entonces como $-(\gamma/\hbar)\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{B}$.

a) Muestre que la función partición individual puede escribirse como

$$z_1(T, B) = \frac{e^{\beta\gamma B(J+1/2)} - e^{-\beta\gamma B(J+1/2)}}{e^{\beta\gamma B/2} - e^{-\beta\gamma B/2}}.$$

b) Derive la magnetización por unidad de volumen M para este sólido y exprese la en términos de la función de Brillouin

$$\mathcal{B}_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J} x\right) - \frac{1}{2J} \coth \frac{x}{2J}.$$

c) Analice el comportamiento de M para $T \rightarrow 0$ y para $T \rightarrow \infty$. Interprete.

d) Encuentre la susceptibilidad magnética isotérmica en el régimen $k_B T \gg \gamma B$ y muestre que se satisface la ley de Curie.

Problema 4. Muestre que para un paramagneto ideal cuya energía libre es de la forma

$$G = \frac{1}{\beta} \Phi(\beta B),$$

el calor específico a campo constante se relaciona con la susceptibilidad por

$$c_H = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_B = \frac{B^2}{T} \chi,$$

o en el régimen donde la ley de Curie es válida

$$c_H = \frac{1}{3} \frac{N}{V} k_B J(J+1) \left(\frac{g\mu_B B}{k_B T} \right)^2.$$

Estimando la contribución de las vibraciones de la red al calor específico (a bajas temperaturas), muestre que la contribución de la red queda por debajo de la contribución de los espines a una temperatura T_o del orden de

$$T_o \approx \left(\frac{N}{N_i} \right)^{1/5} \left(\frac{g\mu_B B}{k_B \Theta_D} \right)^{2/5} \Theta_D .$$

Aquí N_i es el número total de iones y N es el de iones paramagnéticos. ¿Cuál es un valor típico de $\left[g\mu_B B / (k_B \Theta_D) \right]$ para un campo de 10^4 gauss?

Problema 5. Muestre que la magnetización de un gas de electrones no degenerado se reduce a la ley de Curie para $J = \frac{1}{2}$ si se utiliza la expansión de bajas densidades para la función de Fermi $f(\varepsilon) \approx e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}$.

Problema 6. Muestre que el hamiltoniano independiente de espín $\hat{H}$ de un sistema de dos espines $1/2$ (es decir $\hat{H}$ sólo describe la dinámica de la parte espacial) puede escribirse como $\hat{H} = -J \hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$, en el caso que se consideren solo los estados fundamentales del triplete y el singlete de espín.

Problema 7. *Energía exacta del estado fundamental de un “antiferromagneto” simple*

La cadena lineal de Heisenberg con interacción antiferromagnética a primeros vecinos en el caso de cuatro espines se describe por el hamiltoniano

$$\hat{H} = J (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 + \hat{\mathbf{S}}_2 \cdot \hat{\mathbf{S}}_3 + \hat{\mathbf{S}}_3 \cdot \hat{\mathbf{S}}_4 + \hat{\mathbf{S}}_4 \cdot \hat{\mathbf{S}}_1) ,$$

con $J > 0$. Muestre que la energía del estado fundamental es

$$E_o = -4J\hbar^2 S^2 \left(1 + \frac{1}{2S} \right) .$$

Ayuda: Escriba el hamiltoniano en la forma

$$\hat{H} = \frac{J}{2} \left[(\hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2 + \hat{\mathbf{S}}_3 + \hat{\mathbf{S}}_4)^2 - (\hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_3)^2 - (\hat{\mathbf{S}}_2 + \hat{\mathbf{S}}_4)^2 \right] .$$

Problema 8. *Propiedades de los estados de ondas de espín*

a) Verifique la normalización de las ecuaciones

$$|\mathbf{R}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2S}\hbar} \hat{S}_-(\mathbf{R}) |0\rangle , \quad \text{y} \quad \hat{S}_-(\mathbf{R}') \hat{S}_+(\mathbf{R}) |\mathbf{R}\rangle = 2\hbar^2 S |\mathbf{R}'\rangle ,$$

donde $|0\rangle$ es el estado fundamental de la cadena ferromagnética de Heisenberg.

b) Para el estado

$$|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} |\mathbf{R}\rangle$$

muestre que

$$\langle \mathbf{k} | \hat{\mathbf{S}}_{\perp}(\mathbf{R}) \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\perp}(\mathbf{R}') | \mathbf{k} \rangle = \frac{2\hbar^2 S}{N} \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')) , \quad \mathbf{R} \neq \mathbf{R}' ,$$

donde $\hat{\mathbf{S}}_{\perp}(\mathbf{R}) \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\perp}(\mathbf{R}') = \hat{S}_x(\mathbf{R}) \hat{S}_x(\mathbf{R}') + \hat{S}_y(\mathbf{R}) \hat{S}_y(\mathbf{R}')$.

c) Muestre que $\langle \mathbf{k} | \hat{\mathbf{S}}_{\perp}(\mathbf{R}) | \mathbf{k} \rangle = 0$. Esto implica que la fase de la onda de espín no se especifica en el estado $|\mathbf{k}\rangle$.